1. Дисциплина: Математика
2. Преподаватель: Пахомова А.А.
3. Название темы: Неопределенный интеграл. Определенный интеграл (4 часа)
4. Изучить тему. Ответить на вопросы.
5. Вопросы:
   1. Что такое интеграл
   2. Любая ли функция интегрируема?
   3. Определённый интеграл и его свойства
   4. Общая концепция задачи интегрирования
   5. Решить самостоятельно задания.
6. Итоговую работу нужно сдать до 30.03.2020г.

**Неопределенный интеграл.**

**Подробные примеры решений**

На данном уроке мы начнём изучение темы **неопределенный интеграл**, а также подробно разберем примеры решений простейших (и не совсем) интегралов. В этой статье я ограничусь минимумом теории, и сейчас наша задача – научиться решать интегралы.

Что нужно знать для успешного освоения материала? Для того чтобы справиться с интегральным исчислением Вам необходимо уметь находить производные, минимум, на среднем уровне. Поэтому, если материал запущен, то рекомендую сначала внимательно ознакомиться с уроками с предыдущей самостоятельной работой. Не лишним опытом будет, если у Вас за плечами несколько десятков (лучше – сотня) самостоятельно найденных производных. По крайне мере, Вас не должны ставить в тупик задания на дифференцирование простейших и наиболее распространенных функций. Казалось бы, при чем здесь вообще производные, если речь в статье пойдет об интегралах?! А дело вот в чем: **нахождение производных и нахождение неопределенных интегралов (дифференцирование и интегрирование) – это два взаимно обратных действия**, как, например, сложение/вычитание или умножение/деление. Таким образом, без навыка (+ какого-никакого опыта) нахождения производных, к сожалению, дальше не продвинуться.

В этой связи нам потребуются следующие методические материалы: *Таблица производных* и *Таблица интегралов*. Справочные пособия можно открыть, закачать или распечатать из интернета.

В чем сложность изучения неопределенных интегралов? Если в производных имеют место строго 5 правил дифференцирования, таблица производных и довольно четкий алгоритм действий, то в интегралах всё иначе. Существуют десятки способов и приемов интегрирования. И, если способ интегрирования изначально подобран неверно (т.е. Вы не знаете, как решать), то интеграл можно «колоть» буквально сутками, как самый настоящий ребус, пытаясь приметить различные приемы и ухищрения. Некоторым даже нравится. Между прочим, это не шутка, мне довольно часто приходилось слышать от студентов мнение вроде «У меня никогда не было интереса решить предел или производную, но вот интегралы – совсем другое дело, это увлекательно, всегда есть желание «взломать» сложный интеграл». Стоп. Хватит чёрного юмора, переходим к этим самым неопределенным интегралам.

С чего же начать изучение неопределенных интегралов? В интегральном исчислении существуют, на мой взгляд, три столпа или своеобразная «ось», вокруг которой вращается всё остальное. В первую очередь следует хорошо разобраться в простейших интегралах (Этим мы сейчас займемся). Потом нужно детально проработать материала на тему «**Метод замены в неопределенном интеграле**». ЭТО ВАЖНЕЙШИЙ ПРИЁМ! И, в-третьих, обязательно следует ознакомиться с темой «**Методом интегрирования по частям»**, поскольку с помощью него интегрируется обширный класс функций. Если Вы освоите хотя бы эти три темы, то уже «не два». Вам могут «простить» незнание **интегралов от тригонометрических функций**, **интегралов от дробей**, **интегралов от дробно-рациональных функций**, **интегралов от иррациональных функций (корней)**, но вот если «сесть в лужу» на методе замены или методе интегрирования по частям – то это будет очень и очень скверно. Но спешу вас обрадовать, метод замены и метод интегрирования по частям я не даю вам для самостоятельного изучения. С ними мы разберемся очно, как говорится «глаза в глаза».

В Рунете сейчас весьма распространены демотиваторы. В контексте изучения интегралов, наоборот, просто необходим **МОТИВАТОР**. Уважаемые халявщики и другие нормальные студенты, **без интегралов путь на летнюю сессию и 2 курс БУДЕТ РЕАЛЬНО ЗАКРЫТ**. Я серьезно. Вывод таков. **Чем больше интегралов различных типов вы прорешаете, тем легче будет дальнейшая жизнь**. Да, это займет довольно много времени, да, порой, не хочется, да, иногда «да фиг с ним, с этим интегралом, авось не попадется». Но, воодушевлять и греть душу должна следующая мысль, ваши усилия окупятся сполна! Вы будете, как орехи щелкать **дифференциальные уравнения** и легко расправляться с интегралами, которые встретятся в других разделах высшей математики. **Качественно разобравшись с неопределенным интегралом, ВЫ ФАКТИЧЕСКИ ОСВАИВАЕТЕ ЕЩЕ НЕСКОЛЬКО РАЗДЕЛОВ**. Игра стоит свеч.

Итак, начинаем с простого. Посмотрим на таблицу интегралов. Как и в производных, мы замечаем несколько правил интегрирования и таблицу интегралов от некоторых элементарных функций. Нетрудно заметить, что любой табличный интеграл (да и вообще любой неопределенный интеграл) имеет вид:

, где *C = const.*

Сразу разбираемся в обозначениях и терминах:

– значок интеграла.

– подынтегральная функция (пишется с буквой «ы»).

– значок дифференциала. При записи интеграла и в ходе решения важно не терять данный значок. Заметный недочет будет.

– подынтегральное выражение или «начинка» интеграла.

– первообразная функция.

– множество первообразных функций. Не нужно сильно загружаться терминами, самое важное, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа *С*.

**Решить интеграл – это значит найти определенную функцию , пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Еще раз посмотрим на запись: .

Посмотрим в таблицу интегралов.

Что происходит? Левые части у нас **превращаются** в другие функции: .

Упростим наше определение.

**Решить неопределенный интеграл – это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определенную функцию , пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Возьмем, например, табличный интеграл . Что произошло? превратился в функцию .

Как и в случае с производными, для того, чтобы научиться находить интегралы, не обязательно быть в курсе, что такое интеграл, первообразная функция с теоретической точки зрения. Достаточно просто осуществлять превращения по некоторым формальным правилам. Так, в случае совсем не обязательно понимать, почему интеграл превращается именно в . Пока можно принять эту и другие формулы как данность. Все пользуются электричеством, но мало кто задумывается, как там по проводам бегают электроны.

**Так как дифференцирование и интегрирование – противоположные операции, то для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее**:

Иными словами, **если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться исходная подынтегральная функция**.

Вернемся к тому же табличному интегралу .

Убедимся в справедливости данной формулы. Берем производную от правой части:

– исходная подынтегральная функция.

Вот, кстати, стало понятнее, почему к функции всегда приписывается константа *С*. При дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

**Решить неопределенный интеграл** – это значит найти **множество** всех первообразных, а не какую-то одну функцию. В рассматриваемом табличном примере , , , и т.д. – все эти функции являются решением интеграла . Решений бесконечно много, поэтому записывают коротко: , где *C = const.*

Таким образом, любой неопределенный интеграл достаточно легко проверить (в отличие от производных, где хорошую стопудовую проверку можно осуществить разве что с помощью математических программ). Это некоторая компенсация за большое количество интегралов разных видов.

Переходим к рассмотрению конкретных примеров. Начнем, как и при изучении производной, с двух правил интегрирования, которые также называют ***свойствами линейности*** неопределенного интеграла:

, где – постоянный множитель можно (и нужно) вынести за знак интеграла.

– интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности. Данное свойство справедливо для любого количества слагаемых.

Как видите, правила, в принципе, такие же, как и для производных.

***Пример 1***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

***Решение***: Удобнее переписать его на бумагу.



(1) Применяем правило . Не забываем записать значок дифференциала под каждым интегралом. Почему под каждым?  **– это полноценный множитель**, если расписывать решение совсем детально, то первый шаг следует записать так:

(2) Согласно правилу , выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом – это константа, её также выносим.

Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде . Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.**

**!** *Примечание: в отличие от производных, корни в интегралах далеко не всегда следует приводить к виду , а степени переносить вверх. Например, – это готовый табличный интеграл, и всякие китайские хитрости вроде совершенно не нужны. Аналогично: – тоже табличный интеграл, нет никакого смысла представлять дробь в виде . Внимательно изучите таблицу!*

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы:

, , .

Особое внимание обращаю на формулу интегрирования степенной функции , она встречается очень часто, ее лучше запомнить. Следует отметить, что табличный интеграл – частный случай этой же формулы:

**Константу *C* достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла)**.

(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель.

***Проверка***. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:



Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно. От чего плясали, к тому и вернулись. Знаете, очень хорошо, когда история с интегралом заканчивается именно так.

Время от времени встречается немного другой подход к проверке неопределенного интеграла, от ответа берется не производная, а **дифференциал**: .

Его необходимо раскрыть, и с формально-технической точки зрения – это почти то же самое, что найти производную. Дифференциал раскрывается следующим образом: значок *d* убираем, справа над скобкой ставим штрих, в конце выражения приписываем множитель *dx*:



Получено исходное **подынтегральное выражение**, значит, интеграл найден правильно.

Второй способ проверки мне нравится меньше, так как приходится дополнительно рисовать большие скобки и тащить значок дифференциала *dx* до конца проверки. Хотя он корректнее или «солиднее» что ли.

На самом деле я вообще могла умолчать о втором способе проверки. Дело не в способе, а в том, что мы научились раскрывать дифференциал. Еще раз.

**Дифференциал раскрывается следующим образом**:

1. значок *d* убираем;
2. справа над скобкой ставим штрих (обозначение производной);
3. в конце выражения приписываем множитель *dx*.

Например,

Запомните это. Рассмотренный приём потребуется нам очень скоро.

***Пример 2***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. .

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце.

**Когда мы находим неопределенный интеграл, то ВСЕГДА стараемся сделать проверку**, тем более, для этого есть прекрасная возможность. Далеко не все типы задач в высшей математике является подарком с этой точки зрения. Неважно, что часто в контрольных заданиях проверки не требуется, её никто, и ничто не мешает провести на черновике. Исключение можно сделать лишь тогда, когда не хватает времени (например, на зачете, экзамене). Лично я всегда проверяю интегралы, а отсутствие проверки считаю халтурой и некачественно выполненным заданием.

***Пример 3***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. .

***Решение***: Анализируя интеграл, мы видим, что у нас произведение двух функций, да еще и возведение в степень целого выражения. К сожалению, на поприще интегральной битвы нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image101.jpg, .

А поэтому, когда дано произведение или частное, всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму?

Рассматриваемый пример – тот случай, когда можно. Сначала я приведу полное решение, комментарии будут ниже.



(1) Используем старую-добрую формулу квадрата суммы , избавляясь от степени.

(2) Вносим *x*2 в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем свойства линейности интеграла (оба правила сразу).

(4) Превращаем интегралы по табличной формуле .

(5) Упрощаем ответ. Здесь следует обратить внимание на обыкновенную неправильную дробь – она несократима и в ответ входит именно в таком виде. Не нужно делить на калькуляторе ! Не нужно представлять ее в виде !

***Проверка***:



Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

В ходе проверки функцию всегда желательно «упаковать» до первоначального вида, вынося в данном случае *x*2 за скобки и применяя формулу сокращенного умножения в обратном направлении:

***Пример 4***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце.

***Пример 5***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. .

В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то первой мыслью должен быть вопрос: «А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы её упростить?»

Замечаем, что в знаменателе находится одинокий корень из «икс». Один в поле – не воин, а значит, можно почленно разделить числитель на знаменатель:

, где *C = const.*

Действия с дробными степенями я не комментирую. Если Вас все-таки ставит в тупик такой пример, как , и ни в какую не получается правильный ответ , то рекомендую обратиться к школьным учебникам. В высшей математике дроби и действия с ними встречаются на каждом шагу.

Также обратите внимание, что в решении пропущен один шаг, а именно, применение правил , , . Обычно уже при начальном опыте решения интегралов данные свойства считают само собой разумеющимися и не расписывают подробно.

***Пример 6***

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. .

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце урока.

**!** Теперь необходимо ознакомиться с материалом «**Метод замены в неопределенном интеграле**». Дело в том, что подведение функции под дифференциал или метод замены переменной является **ключевым моментом** в изучении темы, поскольку встречается не только «в чистых заданиях на метод замены», но и во многих других разновидностях интегралов.

**Что такое интеграл?**

Сейчас мы, наконец, узнаем, что же такое неопределённый и определённый интеграл. При этом основной упор будет сделан не на создание всеобъемлющего и солидного справочника по теории *(зачем? есть учебники)*, а на **понимание** темы. Статья написана простым языком и рассчитана на широкий круг заинтересованных читателей, включая учащихся старших классов.

Далее буду предполагать, что вас не поставят в тупик элементарные термины и простейшие интегралы. Кроме того, желательно ПОНИМАТЬ, что такое **предел функции**, **бесконечно малая величина** и **производная** – только тогда чтение будет по настоящему увлекательным, а усвоение материала – качественным. Возможно, требования повергли «халтурщиков» в уныние... однако опускать руки не нужно – все пробелы закрываются в кратчайшие сроки!

**Первообразная функция, неопределённый интеграл и его свойства**

К понятию *первообразной функции* приводят многие задачи математического анализа и физики. Рассмотрим былинный физический пример: известен закон изменения скорости тела *v*(*t*), требуется найти закон изменения координаты *x*(*t*) данного тела.

Скорость – это производная от пройдённого пути: , таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции *v*(*t*) (производной) *восстановить* функцию *x*(*t*).

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция *f*(*x*) и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию *F*(*x*), чтобы .

**Определение**: функция *F*(*x*) называется **первообразной** для функции *f*(*x*) на некотором промежутке, если для всех *x* из этого промежутка выполняется равенство или, что то же: *(раскрывать дифференциал мы уже научились выше)*.

Например, для *f*(*x*) = *х*2 *первообразной функцией* на всей числовой прямой будет являться функция . И действительно, для любого «икс»: .

Простое, но требующее доказательства утверждение:

**Теорема**: пусть – какая-нибудь первообразная для функции на некотором промежутке. Тогда функция , где *C* – произвольная константа, тоже будет *первообразной функцией* для на данном промежутке.

**Доказательство**: поскольку производная константы равна нулю, то:

, следовательно, – первообразная для функции по определению первообразной, что и требовалось доказать.

Так, для функции *f*(*x*) = *х*2 первообразной будет являться любая функция из множества

, где *C = const* (мысленно подставьте конкретные числовые значения).

Докажем обратное утверждение: любая другая первообразная *G*(*x*) для функции отличается от лишь на приплюсованную константу, иными словами: *G*(*x*) – *F* (*x*) = *С*.

Вот это уже менее очевидный факт. И в самом деле – вдруг для функции *f*(*x*) = *х*2 существует не только , а какая-нибудь ещё первообразная?

Пусть *G*(*x*), *F* (*x*) – это две первообразные для функции на некотором промежутке. Тогда *для любого «икс» из данного промежутка* **производная разности** будет равна:

, или если записать короче: .

Но с другой стороны, из дифференциального исчисления известно, что данному условию удовлетворяет функция-константа и только она: .

Откуда и следует равенство *G*(*x*) – *F* (*x*) = *С*, которое требовалось доказать. Таким образом, *любая первообразная* для функции имеет вид *G*(*x*) = *F* (*x*) + *С*. Вуаля! (это вместо ч.т.д.)

**Определение**: множество всех первообразных для функции называется неопределённым интегралом от функции и обозначается символом . Таким образом, по определению: , где *C = const.*

Напоминаю, что функция называется *подынтегральной функцией*, –*подынтегральным выражением*, а сам процесс отыскания множества первообразных – **интегрированием**. Интегрирование – это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Для нашего демонстрационного примера: , где *C = const.*

Проверка: – исходная подынтегральная функция.

Любая ли функция интегрируема? Нет.

Сформулируем **достаточное условие интегрируемости**: если на некотором промежутке функция **непрерывна**, то она интегрируема на нём.

Как видите, условие довольно-таки лояльное – для существования первообразной *достаточно* лишь **непрерывности**. Ниже по тексту, если не сказано иного, все функции будем считать интегрируемыми.

**Свойства неопределённого интеграла**

**1) Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению**:

,

.

**Доказательство**: по определению неопределённого интеграла: , следовательно: , что и требовалось доказать.

Второе. По правилу раскрытия дифференциала (а точнее, по **определению дифференциала**) и только что доказанному пункту: .

**2) Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной**: .

Учитывая, что , свойство можно переписать в следующем виде:

.

Тут даже доказывать ничего не надо, поскольку и получается непосредственно само определение неопределённого интеграла.

Как видите, в обоих случаях значки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, что естественно.

Следующие свойства вам хорошо знакомы – это мировые *свойства линейности*, которые справедливы и для других типов интегралов: **определённых**, **двойных**, **тройных**, **криволинейных** и т.д.

**3) Константу можно вынести из-под знака интеграла**

То есть, если , то .

**Доказательство**: а вы как думали? =)

Найдём производную левой части. Используем свойство №1: .

Найдём производную правой части. Используем правило дифференцирования и свойство №1: .

Получены одинаковые результаты, из чего и следует справедливость данного свойства.

Вообще, многие доказательства не столько сложны, сколько занудны и формальны – используются определения, ранее доказанные свойства, теоремы и т.д. Но, несмотря на их сухость, немалая часть студентов входит во вкус и даже начинает читать учебники по высшей математике в любой свободный момент =) Будьте осторожны =)

**4) Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов**:

.

Справедливо для любого количества слагаемых.

Свойство проверяется точно так же, как и предыдущее – берутся производные от обеих частей. Но доказывать его я, пожалуй, не буду – хорошего понемножку =)

Перейдём к ещё более интересному разделу:

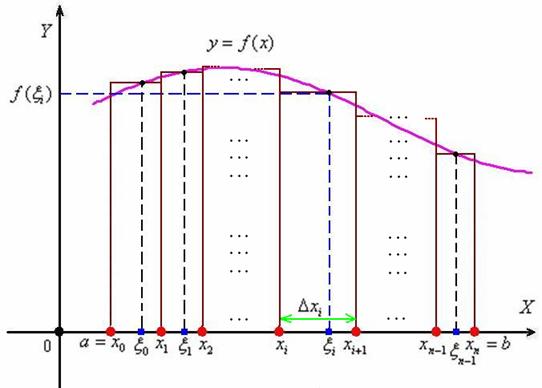
## **Определённый интеграл и его свойства**

Настал момент, который все ждали, затаив дыхание. Что такое определённый интеграл и почему он есть площадь? Да и откуда взялся сам значок интеграла? Вот мы много раз слышали: «интеграл, интеграл, интеграл, …». Но понятие же не из космоса прилетело! Читаем:

Пусть функция *y* = *f* (*x*) определена на промежутке [*a*; *b*]. Для определённости и простоты считаем, что функция положительна (*f* (*x*) > 0) и непрерывна на данном отрезке. **Поставим задачу найти площадь** *S* **криволинейной трапеции**, ограниченной графиком функции *y* = *f* (*x*), прямыми *x = a*, *x = b* и осью *OX*. Обращаю внимание на тот факт, что непрерывность функции на отрезке заведомо гарантирует существование конечной площади *S*.

Разобьём отрезок [*a*; *b*] на *n* частей следующими точками:

*a = x*0 < *x*1 < *x*2 < … < *xi* < *xi*+1 < … < *xn-*1 < *xn* = *b*  (красные точки):



В результате получено *n* частичных промежутков [*x*0; *x*1], [*x*1; *x*2], …, [*xi*; *xi*+1], …, [*xn*-1; *xn*] с длинами , соответственно. В общем случае длины различны – какие-то отрезки короче, какие-то длиннее. Максимальную длину называют **диаметром разбиения** и обозначают буквой «лямбда»: .

**Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора), »

В каждом из полученных промежутков опять же произвольно выбираем точки (синие квадратики).

**Примечание**: («кси») – 14-я буква греческого алфавита

Рассмотрим *i-ый* промежуток [*xi*; *xi*+1]. Его длина, очевидно, равна (зелёная обоюдоострая линия). Значению аргумента соответствует значение функции (синие пунктирные линии), и произведение в точности равно **площади** соответствующего коричневого прямоугольника.

Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:

Данная сумма называется **интегральной суммой**, и её часто записывают в свёрнутом виде:

**Примечание**: это значок суммы, а переменная *i* – своеобразный «счётчик», т.е. сначала *i =* 0, затем *i =* 1, потом *i =* 2, … и, наконец, *i = n –* 1.

Что означает прилагательное «интегральной»? В широком смысле слова, **интегрировать – это значит, что-то объединять**. В данном случае интегральная сумма **объединяет** площади коричневых прямоугольников и с некоторой точностью приближает площадь криволинейной трапеции:

Теперь зададимся вопросом: **как улучшить точность приближения**? Действия очевидны – увеличиваем и увеличиваем значение *n*. При этом количество отрезков [*x*0; *x*1], [*x*1; *x*2], …, [*xi*; *xi*+1], …, [*xn*-1; *xn*] **растёт**, а их длины , –**уменьшаются**, в том числе неизбежно уменьшается и максимальная длина . Количество точек тоже возрастает и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

И, если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности , то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции:

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:

Наблюдаем за удивительным превращением:

1) В рассматриваемом контексте сумму ещё с 17 века обозначали растянутой буквой S (Summa). Это обозначение известно, как значок интеграла:

2) Если (и, следовательно, ), то значения стремятся «покрыть» **все** значения функции из промежутка [*a*; *b*], то есть: , при этом пределы интегрирования:

3) И, наконец, длина любого промежуточного отрезка становится **бесконечно малой**. Обозначение этой бесконечно малой длины мы тоже хорошо знаем, оно указывает, что объединение ведётся по переменной «икс»: *dx*

**В результате, площадь криволинейной трапеции**:

**Определение**: конечный предел интегральной суммы при , **не зависящий** ни от способа дробления отрезка [*a*; *b*], ни от выбора точек , называется **определённым интегралом** функции по промежутку [*a*; *b*] и обозначается символом .

При этом функция называется **интегрируемой** в промежутке [*a*; *b*].

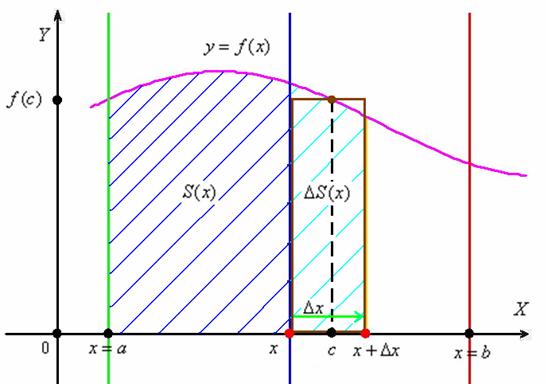
**По аналогичному принципу** (дробление отрезка, выбор промежуточных точек, нахождение интегральной суммы, предел и предельный переход) **выводятся другие тематические формулы**: **объема тела вращения**, **длины дуги кривой**, **площади поверхности вращения** и т. д. Надеюсь, теперь вам будет значительно легче разобраться в соответствующем теоретическом материале.

Если что-то осталось недопонятым, текст следует не спеша перечитать заново либо вернуться к нему позже.

Всё было бы хорошо, но формулу очень трудно применить на практике (даже для простых функций), поэтому возникает задача отыскания более эффективного пути расчёта площади. И такой путь действительно существует – ведь из определения определённого интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения промежутка [*a*; *b*] и от выбора точек . **Важен лишь только** нижний предел интегрирования «*а*», верхний предел интегрирования «*бэ*» и сама функция «эф от икс».

### **Вывод формулы Ньютона-Лейбница**

Рассмотрим тот же график и познакомимся с функцией переменной площади. Что это за функция? Зафиксируем произвольную точку *x* (левая красная точка), лежащую между точками «а» и «бэ»:



В данной точке функция равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь начнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке *x = a* станет равной нулю: (прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную позицию и сдвигаем синюю линию вправо – в этом случае площадь начнёт расти. И когда мы достигнем верхнего предела *x = b* (синяя прямая «закроет» красную), площадь будет равна в точности площади всей криволинейной трапеции: .

Таким образом, аргумент может изменяться в пределах , при этом функция (площадь) будет возрастать от до .

**Докажем, что функция переменной площади является первообразной функцией для функции , то есть докажем, что** .

Вернёмся к нашей точке «икс» и зададим в ней приращение (зелёная стрелка). Для определённости полагаем, что (случай доказывается аналогично). Приращение аргумента влечёт приращение функции – геометрически это площадь криволинейной трапеции, которая заштрихована голубым цветом.

По определениюпроизводной, производная функции – это отношении приращения функции к приращению аргумента при :

Таким образом, **для любого** *x* из рассматриваемого промежутка справедливо равенство , означающее, что функция является первообразной для функции .

По теореме, доказанной в самом начале, множество всех первообразных представимо в виде , где – какая-нибудь другая первообразная для функции .

Теперь в данное равенство подставляем *x = a* и соответствующее значение площади :

, откуда следует, что

Найденное значение константы подставляем в :

Выруливаем на финишную прямую. При *x = b* функция принимает значение, равное площади всей криволинейной трапеции: . Подставим *x = b* и в уравнение :

Следует отметить, что в учебниках по высшей математике вывод этой формулы проводится в более солидном ключе – с помощью интеграла с переменным верхним пределом. Я же ограничилась упрощенной версией доказательства, чтобы материал был понятен бОльшему количеству читателей.

Это ещё, кстати, не всё =) Завершаем мысль:

Выше мы доказали, что площадь криволинейной трапеции – есть предел интегральной суммы:

Но с другой стороны, .

И из этих двух фактов следует лаконичная **формула Ньютона-Лейбница**:

, где – первообразная функция для функции .

### **Рассмотрим основные свойства определённого интеграла**

У меня нет цели копипастить учебники, и я остановлюсь только на тех свойствах, которые имеют существенное значение для практики. Нумерация, пожалуй, ни к чему:

– Свойство, которое уже фигурировало в предыдущем пункте: интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

Графическая интерпретация очевидна: криволинейная трапеция вырождается в отрезок, а площадь отрезка с геометрической точки зрения равна нулю.

– Свойства линейности:

Уважительно промолчим.

– Если у интеграла поменять местами пределы интегрирования, то он сменит знак:

Почему? Пусть для определённости *a < b*. Тогда при перестановке пределов интегрирования разбиение отрезка [*a*; *b*] будет проводиться справа налево (вспоминаем ступенчатую фигуру 1-го чертежа), и длины частичных промежутков формально станут отрицательными , поэтому интегральная сумма и сам интеграл (как предел суммы) сменит знак.

Следует заметить, что на практике намного чаще пользуются вторым случаем – когда изначально *a > b*, например:

Цель этих действий – расставить пределы интегрирования в привычном порядке, хотя исходный интеграл и так рассчитывается без всяких проблем. Однако не редкость, когда перестановка пределов интегрирования не только удобна, но и рациональна.

– Какими бы ни были точки *a, b, c*:

Здесь в первую очередь, конечно же, напрашивается ситуация, когда точка «цэ» лежит внутри отрезка [*a*; *b*]. Просто и естественно – криволинейную трапецию можно разделить на две части, т.е. изначальная площадь будет равна сумме площадей.

Но данное свойство работает и в «нестандартном» случае, когда точка «цэ» лежит вне промежутка [*a*; *b*]. Желающие могут проанализировать это самостоятельно.

– **Пожалуйста, запомните!** Если подынтегральная функция , то

(здесь и далее полагаем, что *a < b*). И, наоборот, если , то интеграл будет неположительным:

Таким образом, если при вычислении интеграла у вас получилось отрицательное значение – ищите ошибку. Функция на промежутке интегрирования [– 5; – 1] (и, к слову, вообще на любом ненулевом промежутке), поэтому интеграл обязательно должен получиться положительным.

Наоборот – если интеграл получился положительным, то здесь тоже где-то допущена ошибка, поскольку на отрезке .

**! Совет**: перед решением любого определённого интеграла всегда полезно проанализировать знак подынтегральной функции!

– **Ещё одно важное свойство**. Если функции *f* (*x*), интегрируемы на [*a*; *b*], и для всех «икс» из данного промежутка справедливо неравенство, то

Тоже всё наглядно – график функции *f* (*x*) расположен не ниже графика функции , поэтому площадь будет не меньше, а на практике почти всегда – **больше** площади.

Из данного свойства следует **важнейшая рабочая формула** вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций *f* (*x*), и прямыми *x = a, x = b*:

– Если на [*a*; *b*], то

Рассмотрим конкретную задачу, поясняющую геометрический смысл данного свойства, а то я чувствую, вы уже изнываете без практики =)

**Пример 7**

Оценить определенный интеграл

**Решение**: подынтегральная функция непрерывна на отрезке , а значит, достигает на нём *m* и *M* – **наименьшего и наибольшего значений**. Решаем стандартную двухшаговую задачу по нахождению :

1. Вычислим значения функции в **критических точках**, принадлежащих отрезку:

– критическая точка.

1. Вычислим значения функции на концах отрезка:

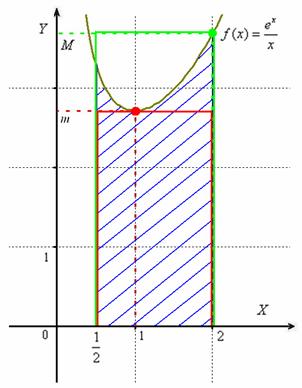
Таким образом:

Длина отрезка интегрирования:

В результате, оценка определённого интеграла:

**Ответ**:

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции (синяя штриховка) **не меньше** площади красного прямоугольника и **не больше** площади зелёного прямоугольника :



Да, оценка, конечно, очень грубая, но таково задание, и оно иногда встречается в контрольных работах. Кстати, интеграл является не берущимся, и вычислить заштрихованную площадь можно лишь с определённой точностью, например, **методом трапеций**, **по формуле Симпсона**, **с помощью разложения функции в ряд**, др. способами.

– И в заключение параграфа – **теорема о среднем**: если функция *f* (*x*) непрерывна на [*a*; *b*], то существует точка – такая, что

Доказательство опустим, поскольку в нём фигурируют другие теоремы математического анализа.

А сейчас оставшихся со мной читателей ждёт вознаграждение, позволяющее проникнуться, если хотите, философией темы:

## **Общая концепция задачи интегрирования**

В предыдущих пунктах мы разобрали задачу нахождения площади, но это частная и довольно малая область применения интегрального исчисления. Существует великое множество задач интегрирования, при этом наибольшим разнообразием отличается даже не математика, а физика.

Давайте вспомним 1-й чертёж, где мы установили, что площадь *S* криволинейной трапеции равна определённому интегралу . Ведь что такое произведение ? Данное произведение выражает площадь прямоугольника с высотой и бесконечно малой длиной . Иными словами, это элементарный «кирпичик» площади: .

Объединяя (интегрируя) эти бесконечно малые прямоугольники по отрезку [*a*; *b*], мы и получаем площадь всей криволинейной трапеции:

Заключительные примеры позволят вам ещё лучше понять сущность интегрирования:

**Пример 8**

Найти путь, пройдённый телом в промежуток времени от *t*1 = 2 c до *t*2 = 5 c, если известен закон изменения его скорости (м/с)

**Решение**: обозначим через *X* расстояние, пройдённое телом за 5 – 2 = 3 секунды – начиная с момента времени *t*1 = 2 c и заканчивая моментом *t*2 = 5 c.

Немного проанализируем задачу. Вот если бы тело двигалось с постоянной скоростью, например, 7 м/с, то никаких проблем – оно бы за 3 секунды прошло путь в 7 ∙ 3 = 21 метр. Но у нас движение даже не равноускоренное (при котором ещё можно извернуться без матана) – у нас закон изменения скорости нелинейный. При этом в начальный момент времени скорость равна м/с, а в конечный момент: м/с. Но от этой информации легче не стало – какое расстояние *X* успело пройти тело за эти три секунды?! Задание осложняется ещё и тем, что скорость существенно возрастает даже за малые промежутки времени, поэтому у нас нет и близкой оценки пройдённого пути.

Как быть? На помощь приходит интегрирование. Рассмотрим бесконечно малый промежуток времени *dt*, на котором скорость тела можно считать постоянной (или, как говорят физики, мгновенной). Тогда произведение данной скорости на промежуток времени *dt* равно элементарному бесконечно малому «кусочку» пройдённого пути: (скорость умножить на время – это же расстояние, верно?).

Всё что осталось сделать – это объединить микроскопические «шажочки» *dX* на временном промежутке [2; 5]:

**Ответ**: 45 метров

Решения и ответы:

*Пример 2:* ***Решение****:*

*Пример 4:* ***Решение****:*

*В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image137.gif*

*Пример 6:* ***Решение****:*

Я выполнила проверку, а Вы? ;)

