1. Дисциплина: Математика
2. Преподаватель: Пахомова А.А.
3. Название темы: Аналитическая геометрия (16 часов)
4. Изучить тему. Ответить на вопросы.
5. Вопросы:
	1. Что такое вектор?
	2. Коллинеарность векторов
	3. Длина вектора.
	4. Скалярное произведение векторов
	5. Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов
	6. Векторное и смешанное произведение векторов
	7. Решить самостоятельно задания.
6. Итоговую работу нужно сдать до 04.06.2020г.

**Векторы. Действия с векторами.**

**Координаты вектора. Простейшие задачи с векторами**

Аналитическая геометрия, как ни странно, может показаться более интересной и доступной. Что означает прилагательное «аналитическая»? На ум сразу приходят два штампованных математических оборота: «графический метод решения» и «аналитический метод решения». *Графический метод*, понятно, связан с построением графиков, чертежей. *Аналитический* же *метод* предполагает решение задач *преимущественно* посредством алгебраических действий. В этой связи алгоритм решений практически всех задач аналитической геометрии прост и прозрачен, зачастую достаточно аккуратно применить нужные формулы – и ответ готов! Нет, конечно, совсем без чертежей тут не обойдется, к тому же для лучшего понимания материала я постараюсь приводить их сверх необходимости.

Открываемый курс уроков по геометрии не претендует на теоретическую полноту, он ориентирован на решение практических задач. Я включу в свои лекции только то, что с моей точки зрения, является важным в практическом плане. Если вам необходима более полная справка по какому-либо подразделу, рекомендую следующую вполне доступную литературу:

1) Вещь, с которой, без шуток, знакомо несколько поколений: **Школьный учебник по геометрии**, авторы – *Л.С. Атанасян и Компания*. Сия вешалка школьной раздевалки уже выдержала 20-ть (!) переизданий, что, конечно, не является пределом.

2) **Геометрия в 2 томах**. Авторы *Л.С. Атанасян, Базылев В.Т*. Это литература для высшей школы, вам потребуется **первый том**. Из моего поля зрения могут выпадать редко встречающиеся задачи, и учебное пособие окажет неоценимую помощь.

Обе книги можно бесплатно закачать в Интернете.

Предполагается, что читатель знаком с базовыми геометрическими понятиями и фигурами: точка, прямая, плоскость, треугольник, параллелограмм, параллелепипед, куб и т.д. Желательно помнить некоторые теоремы, хотя бы теорему Пифагора.

А сейчас мы последовательно рассмотрим: понятие вектора, действия с векторами, координаты вектора.

**Понятие вектора. Свободный вектор**

Сначала повторим школьное определение вектора. **Вектором** называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:


В данном случае началом отрезка является точка , концом отрезка – точка . Сам вектор обозначен через . **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор , и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери колледжа или выйти из дверей колледжа – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* . У такого вектора конец и начало совпадают.

***!!! Примечание:*** *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

**Обозначения:** Многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении  и сказали, там же вверху еще стрелку ставят! Верно, можно записать со стрелкой: , но допустима и **запись , которую я буду использовать в дальнейшем**. В учебной литературе иногда вообще не заморачиваются клинописью, а выделяют буквы жирным шрифтом: , подразумевая тем самым, что это вектор.

То была стилистика, а сейчас о способах записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:  и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:  В частности, наш вектор  можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой .

**Длиной** или **модулем** ненулевого вектора  называется длина отрезка . Длина нулевого вектора  равна нулю. Логично.

Длина вектора обозначается знаком модуля: , 

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

То были элементарные сведения о векторе, знакомые всем школьникам. В аналитической же геометрии рассматривается так называемый **свободный вектор**.

Если совсем просто – **вектор можно отложить от любой точки**:


Такие векторы мы привыкли называть равными (определение равных векторов будет дано ниже), но чисто с математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР или **свободный вектор**. Почему свободный? Потому что в ходе решения задач вы можете «пристроить» тот или иной «школьный» вектор в ЛЮБУЮ, нужную вам точку плоскости или пространства. Это очень крутое свойство! Представьте направленный отрезок произвольной длины и направления – его можно «клонировать» бесконечное количество раз и в любой точке пространства, по сути, он существует ВЕЗДЕ.

Итак, **свободный вектор** – это **множество** одинаковых направленных отрезков. Школьное определение вектора, данное в начале параграфа: «Вектором называется направленный отрезок…», подразумевает конкретный направленный отрезок, взятый из данного множества, который привязан к определённой точке плоскости или пространства.

Следует отметить, что с точки зрения физики понятие свободного вектора в общем случае некорректно, и точка приложения имеет значение. Действительно, прямой удар одинаковой силы по носу или по лбу ~~хватит развивать мой дурацкий пример~~ влёчет разные последствия.

Далее, если не оговаривается иное, речь пойдёт только о свободных векторах.

**Действия с векторами. Коллинеарность векторов**

В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и др.* Для затравки повторим два правила, которые особенно актуальны для решения задач аналитической геометрии.

**Правило сложения векторов по правилу треугольников**

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора  и :


Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор  от *конца* вектора :


Суммой векторов  и  является вектор . Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору , а затем по вектору . Тогда сумма векторов  представляет собой вектор результирующего пути  с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов. Как говорится, тело может пройти свой путь сильно поддатым по зигзагу, а может и на автопилоте – по результирующему вектору суммы.

Кстати, если вектор  отложить от *начала* вектора , то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

**Умножение вектора на число**

Сначала о коллинеарности векторов. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Грубо говоря, речь идёт о параллельных векторах. Но применительно к ним всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Представьте два коллинеарных вектора. Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

**Обозначения:** коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: , при этом возможна детализация:  (векторы сонаправлены) или  (векторы направлены противоположно).

**Произведением** ненулевого вектора  на число  является такой вектор , длина которого равна , причём векторы  и  сонаправлены при  и противоположно направлены при .

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:


Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель  отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах  или , то длина вектора уменьшается. Так, длина вектора  в два раза меньше длины вектора . Если множитель  по модулю больше единицы, то длина вектора увеличивается в  раз.

3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, . **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

4) Векторы  сонаправлены. Векторы  и  также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

**Какие векторы являются равными?**

**Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину**. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

С точки зрения понятия свободного вектора, равные векторы – это один и тот же вектор, о чём уже шла речь в предыдущем параграфе.

**Координаты вектора на плоскости и в пространстве**

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы  и :



Векторы  и  **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны. Рекомендую потихоньку привыкать к терминам: вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

**Обозначение:** ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: .

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Что такое базис, думаю, интуитивно многим понятно.Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это своеобразный фундамент, на котором кипит полная и насыщенная геометрическая жизнь.

Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

**Обозначение:** базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: . Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

**Любой** вектор  плоскости **единственным образом** выражается в виде:
, где  – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение  называется **разложением вектора**  **по базису** .

Ужин подан:



**!** ВСЕМ настоятельно рекомендую прочитать ВСЁ!

Начнем с первой буквы алфавита: . По чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:

1. правило умножения вектора на число:  и ;
2. сложение векторов по правилу треугольника: .

А теперь мысленно отложите вектор  от любой другой точки плоскости. Совершенно очевидно, что его разложение  будет «неотступно следовать за ним». Вот она, свобода вектора – вектор «всё носит при себе». Это свойство, разумеется, справедливо для любого вектора. Забавно, что сами базисные (свободные) векторы  не обязательно откладывать от начала координат, один можно нарисовать, например, слева внизу, а другой – справа вверху, и от этого ничего не изменится! Правда, делать так не нужно, поскольку преподаватель тоже проявит оригинальность и нарисует вам «зачтено» в неожиданном месте.

Векторы ,  иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор  сонаправлен с базисным вектором , вектор  направлен противоположно по отношению к базисному вектору . У данных векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так:





А базисные векторы, к слову, так:  (по сути, они выражаются сами через себя).

И, наконец: , .

Рассмотренное разложение вида  иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

 Или со знаком равенства: 

Сами базисные векторы записываются так:  и 

То есть, в круглых скобках указываются координаты вектора. В практических задачах используются все три варианта записи.

Сомневалась, говорить ли, но всё-таки скажу: **координаты векторов переставлять нельзя**. **Строго на первом месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору , **строго на втором месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору . Действительно,  и  – это ведь два разных вектора.

С координатами на плоскости разобрались. Теперь рассмотрим векторы в трехмерном пространстве, здесь практически всё так же! Только добавится ещё одна координата. Трехмерные чертежи выполнять тяжко, поэтому ограничусь одним вектором, который для простоты отложу от начала координат:



Перед вами *ортонормированный* базис  трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы  данного базиса попарно ортогональны:  и . Ось  наклонена под углом 45 градусов только для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства.

**Любой** вектор  трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису : , где  – координаты вектора  (числа) в данном базисе.

Пример с картинки: . Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число:  (красная стрелка),  (зеленая стрелка) и  (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх, векторов: . Вектор суммы  начинается в исходной точке отправления (начало вектора ) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора ).

Все векторы трехмерного пространства, естественно, тоже свободны, попробуйте мысленно отложить вектор  от любой другой точки, и вы поймёте, что его разложение  «останется при нём».

Аналогично плоскому случаю, помимо записи  широко используются версии со скобками:  либо .

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры: вектор  (дотошно ) – запишем ; вектор  (дотошно ) – запишем ; вектор  (дотошно ) – запишем .

Базисные векторы записываются следующим образом:



Вот, пожалуй, и все минимальные теоретические знания, необходимые для решения задач аналитической геометрии. Возможно многовато терминов и определений, поэтому рекомендую перечитать и осмыслить данную информацию ещё раз. Да и любому читателю будет полезно время от времени обращаться к базовому уроку для лучшего усвоения материала. Коллинеарность, ортогональность, ортонормированный базис, разложение вектора – эти и другие понятия будут часто использоваться в дальнейшем. Отмечу, что материалов данной статьи недостаточно для сдачи экзамена, так как все теоремы (к тому же без доказательств) я аккуратно шифрую – в ущерб научному стилю изложения, но плюсом к вашему пониманию предмета. Для получения обстоятельной теоретической справки прошу следовать на поклон к профессору Атанасяну.

А мы переходим к практической части:

**Простейшие задачи аналитической геометрии. Действия с векторами в координатах**

Задания, которые будут рассмотрены, крайне желательно научиться решать на полном автомате, а формулы **запомнить наизусть**, даже специально не запоминать, сами запомнятся =) Это весьма важно, поскольку на простейших элементарных примерах базируются другие задачи аналитической геометрии, и будет досадно тратить дополнительное время на поедание пешек. Не нужно застёгивать верхние пуговицы на рубашке, многие вещи знакомы вам со школы.

Изложение материала пойдет параллельным курсом – и для плоскости, и для пространства. По той причине, что все формулы… сами увидите.

**Как найти вектор по двум точкам?**

Если даны две точки плоскости  и , то вектор  имеет следующие координаты: 

Если даны две точки пространства  и , то вектор  имеет следующие координаты: 

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Задание: Для тех же точек запишите формулы нахождения координат вектора . Формулы в конце урока.

Пример 1

Даны две точки плоскости  и . Найти координаты вектора 

**Решение:** по соответствующей формуле: 

Как вариант, можно было использовать следующую запись: 

Эстеты решат и так: 

Лично я привыкла к первой версии записи.

**Ответ:** 

По условию не требовалось строить чертежа (что характерно для задач аналитической геометрии), но в целях пояснения некоторых моментов, не поленюсь:


Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

**Координаты точек** – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Откладывать точки на координатной плоскости, думаю, все умеют ещё с 5-6 класса. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

**Координаты же вектора** – это его разложение по базису , в данном случае . Любой вектор является свободным, поэтому при желании или необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости (во избежание путаницы переобозначив, например, через ). Интересно, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости .

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: , а **смысл координат** абсолютно **разный**, и вам следует хорошо понимать эту разницу. Данное отличие, разумеется, справедливо и для пространства.

Дамы и господа, набиваем руку:

Пример 2

а) Даны точки  и . Найти векторы  и .

б) Даны точки  и . Найти векторы  и .

в) Даны точки  и . Найти векторы  и .

г) Даны точки . Найти векторы .

Пожалуй, достаточно. Это примеры для самостоятельного решения, постарайтесь ими не пренебрегать, окупится ;-). Чертежи делать не нужно. Решения и ответы в конце урока.

**Что важно при решении задач аналитической геометрии?** Важно быть ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫМ, чтобы не допустить мастерскую ошибку «два плюс два равно нулю». Сразу извиняюсь, если где ошиблась =)

**Как найти длину отрезка?**

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости  и , то длину отрезка  можно вычислить по формуле 

Если даны две точки пространства  и , то длину отрезка  можно вычислить по формуле 

***Примечание:*** *Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты:  и , но более стандартен первый вариант*

Пример 3

Даны точки  и . Найти длину отрезка .

**Решение:** по соответствующей формуле:



**Ответ:** 

Для наглядности выполню чертёж



Отрезок  – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ  можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

Да, решение короткое, но в нём есть ещё пара важных моментов, которые хотелось бы пояснить:

Во-первых, в ответе ставим размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это, миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Во-вторых, повторим школьный материал, который полезен не только для рассмотренной задачи:

Читаем!!!

Обратите внимание на **важный технический приём** – **вынесение множителя из-под корня**. В результате вычислений у нас получился результат  и хороший математический стиль предполагает вынесение множителя из-под корня (если это возможно). Подробнее процесс выглядит так: . Конечно, оставить ответ в виде  не будет ошибкой – но недочетом-то уж точно и весомым аргументом для придирки со стороны преподавателя.

Вот другие распространенные случаи:



Нередко под корнем получается достаточно большое число, например . Как быть в таких случаях? На калькуляторе проверяем, делится ли число на 4: . Да, разделилось нацело, таким образом: . А может быть, число  ещё раз удастся разделить на 4? . Таким образом: . У числа  последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: . В результате:

 Готово.

**Вывод:** если под корнем получается неизвлекаемое нацело число, то пытаемся вынести множитель из-под корня – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т.д.

В ходе решения различных задач корни встречаются часто, всегда пытайтесь извлекать множители из-под корня во избежание более низкой оценки да ненужных заморочек с доработкой ваших решений по замечанию преподавателя.

Давайте заодно повторим возведение корней в квадрат и другие степени:



Правила действий со степенями в общем виде можно найти в школьном учебнике по алгебре, но, думаю, из приведённых примеров всё или почти всё уже ясно.

Задание для самостоятельного решения с отрезком в пространстве:

Пример 4

Даны точки  и . Найти длину отрезка .

Решение и ответ в конце урока.

**Как найти длину вектора?**

Если дан вектор плоскости , то его длина вычисляется по формуле .

Если дан вектор пространства , то его длина вычисляется по формуле .

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки  и . Найти длину вектора .

Я взяла те же точки, что и в Примере 3.

**Решение:** Сначала найдём вектор : 

По формуле  вычислим длину вектора: 

**Ответ:** 

Не забываем указывать размерность – «единицы»! Всегда ли, кстати, нужно рассчитывать приближенное значение (в данном примере 8,94), если этого не требуется в условии? С моей точки зрения, лишним не будет, отсутствие приближенного значения тянет на придирку. Округление целесообразно проводить до 2-3 знаков после запятой.

Выполним чертеж к задаче:



В чём принципиальное отличие от Примера 3? Отличие состоит в том, что **здесь речь идёт о векторе**, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости, при этом его лучше переобозначить, например, через .

А в чём сходство Примера 3 и Примера 5? Геометрически очевидно, что длина отрезка  равна длине вектора . Так же очевидно, что длина вектора  будет такой же. По итогу: 

Задачу 3 можно было решить и вторым способом, повторю условие: Даны точки  и . Найти длину отрезка .

Вместо применения формулы , поступаем так:

1) Находим вектор .

2) А теперь ссылаемся на то, что длина отрезка  равна длине вектора :



Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

Вышесказанное справедливо и для пространственного случая

Для тренировки:

Пример 6

а) Даны точки  и . Найти длину вектора .

б) Даны векторы , ,  и . Найти их длины.

Решения и ответы в конце урока.

**Действия с векторами в координатах**

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости  и . Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: . Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: . Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор  и найдём сумму трёх векторов: 

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы , то их суммой является вектор .

2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор  умножить на число , нужно каждую координату данного вектора умножить на число : .

Для пространственного вектора  правило такое же: 

Приведённые факты строго доказываются в курсе аналитической геометрии.

***Примечание:*** *Данные правила справедливы не только для ортонормированных базисов ,  но и для произвольного аффинного базиса плоскости или пространства*.

Пример 7

Даны векторы  и . Найти  и 

**Решение** чисто аналитическое:



**Ответ:** 

Чертеж в подобных задачах строить не надо, тем не менее, геометрическая демонстрация будет весьма полезной. Если считать, что векторы заданы в ортонормированном базисе , то графическое решение задачи будет таким:



Коль скоро речь идет **только** о векторах в ортонормированном базисе, то оси рисовать не обязательно. Достаточно начертить базисные векторы, причём, где угодно. Ну, и координатную сетку для удобства. Строго говоря, ранее я допустила небольшой огрех – в некоторых чертежах урока тоже можно было не чертить декартову прямоугольную систему координат. Векторам она не нужна, им нужен базис. Впрочем, лучше всегда рисуйте, а то напугаете всех своими знаниями =)

Как видите, графический способ решения привёл к тем же результатам, что и аналитический способ решения. Ещё раз заметьте свободу векторов: любую из трёх «конструкций» можно переместить в любую точку плоскости.

Для векторов в пространстве можно провести аналогичные выкладки. Но там чертежи строить значительно сложнее, поэтому ограничусь аналитическим решением (на практике, собственно, бОльшего и не надо):

Пример 8

Даны векторы  и . Найти  и 

**Решение:** Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:



**Ответ:** 

И в заключение занятный пример с векторами на плоскости:

Пример 9

Даны векторы . Найти  и 

Это задача для самостоятельного решения.

Какой вывод? Многие задачи аналитической геометрии прозрачны и просты, главное, не допустить вычислительных ошибок. Следующие рекомендуемые к самостоятельному изучению уроки:

**Скалярное произведение векторов**

**Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов**

**Векторное и смешанное произведение векторов**

Любите векторы, и векторы полюбят вас!

Решения и ответы:

*Задание: , *

*Пример 2:* ***Решение:***

*а)*

**

*б)*

**

*в)*

**

*г)*

**

*Пример 4:* ***Решение:***

*По соответствующей формуле:* и 

**

***Ответ:***

*Пример 6:*  и 

*а)* ***Решение:*** *найдём вектор : *

*Вычислим длину вектора: *

***Ответ:*** **

*б)* ***Решение:***

*Вычислим длины векторов:*

**

*Пример 9:* ***Решение:***

**

***Примечание:*** *Перед выполнением действий можно предварительно раскрыть скобки: *

***Ответ:*** **