1. Дисциплина: Математика
2. Преподаватель: Пахомова А.А.
3. Название темы: Аналитическая геометрия (16 часов)
4. Изучить тему. Ответить на вопросы.
5. Вопросы:
   1. Что такое вектор?
   2. Коллинеарность векторов
   3. Длина вектора.
   4. Скалярное произведение векторов
   5. Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов
   6. Векторное и смешанное произведение векторов
   7. Решить самостоятельно задания.
6. Итоговую работу нужно сдать до 04.06.2020г.

**Векторы. Действия с векторами.**

**Координаты вектора. Простейшие задачи с векторами**

Аналитическая геометрия, как ни странно, может показаться более интересной и доступной. Что означает прилагательное «аналитическая»? На ум сразу приходят два штампованных математических оборота: «графический метод решения» и «аналитический метод решения». *Графический метод*, понятно, связан с построением графиков, чертежей. *Аналитический* же *метод* предполагает решение задач *преимущественно* посредством алгебраических действий. В этой связи алгоритм решений практически всех задач аналитической геометрии прост и прозрачен, зачастую достаточно аккуратно применить нужные формулы – и ответ готов! Нет, конечно, совсем без чертежей тут не обойдется, к тому же для лучшего понимания материала я постараюсь приводить их сверх необходимости.

Открываемый курс уроков по геометрии не претендует на теоретическую полноту, он ориентирован на решение практических задач. Я включу в свои лекции только то, что с моей точки зрения, является важным в практическом плане. Если вам необходима более полная справка по какому-либо подразделу, рекомендую следующую вполне доступную литературу:

1) Вещь, с которой, без шуток, знакомо несколько поколений: **Школьный учебник по геометрии**, авторы – *Л.С. Атанасян и Компания*. Сия вешалка школьной раздевалки уже выдержала 20-ть (!) переизданий, что, конечно, не является пределом.

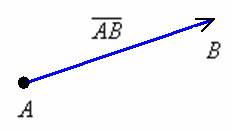
2) **Геометрия в 2 томах**. Авторы *Л.С. Атанасян, Базылев В.Т*. Это литература для высшей школы, вам потребуется **первый том**. Из моего поля зрения могут выпадать редко встречающиеся задачи, и учебное пособие окажет неоценимую помощь.

Обе книги можно бесплатно закачать в Интернете.

Предполагается, что читатель знаком с базовыми геометрическими понятиями и фигурами: точка, прямая, плоскость, треугольник, параллелограмм, параллелепипед, куб и т.д. Желательно помнить некоторые теоремы, хотя бы теорему Пифагора.

А сейчас мы последовательно рассмотрим: понятие вектора, действия с векторами, координаты вектора.

**Понятие вектора. Свободный вектор**

Сначала повторим школьное определение вектора. **Вектором** называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:  


В данном случае началом отрезка является точка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004.gif, концом отрезка – точка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006.gif. Сам вектор обозначен через http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008.gif. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010.gif, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери колледжа или выйти из дверей колледжа – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012.gif. У такого вектора конец и начало совпадают.

***!!! Примечание:*** *Здесь и далее можете считать, что векторы лежат в одной плоскости или можете считать, что они расположены в пространстве – суть излагаемого материала справедлива и для плоскости и для пространства.*

**Обозначения:** Многие сразу обратили внимание на палочку без стрелочки в обозначении http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0000.gif и сказали, там же вверху еще стрелку ставят! Верно, можно записать со стрелкой: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image014.gif, но допустима и **запись http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0001.gif, которую я буду использовать в дальнейшем**. В учебной литературе иногда вообще не заморачиваются клинописью, а выделяют буквы жирным шрифтом: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016.gif, подразумевая тем самым, что это вектор.

То была стилистика, а сейчас о способах записи векторов:

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image018.gif и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

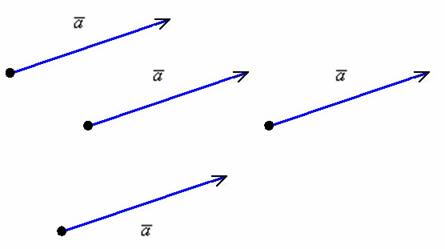
2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image020.gif В частности, наш вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0002.gif можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022.gif.

**Длиной** или **модулем** ненулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image008_0003.gif называется длина отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image024.gif. Длина нулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0000.gif равна нулю. Логично.

Длина вектора обозначается знаком модуля: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image026.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image028.gif

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

То были элементарные сведения о векторе, знакомые всем школьникам. В аналитической же геометрии рассматривается так называемый **свободный вектор**.

Если совсем просто – **вектор можно отложить от любой точки**:  


Такие векторы мы привыкли называть равными (определение равных векторов будет дано ниже), но чисто с математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР или **свободный вектор**. Почему свободный? Потому что в ходе решения задач вы можете «пристроить» тот или иной «школьный» вектор в ЛЮБУЮ, нужную вам точку плоскости или пространства. Это очень крутое свойство! Представьте направленный отрезок произвольной длины и направления – его можно «клонировать» бесконечное количество раз и в любой точке пространства, по сути, он существует ВЕЗДЕ.

Итак, **свободный вектор** – это **множество** одинаковых направленных отрезков. Школьное определение вектора, данное в начале параграфа: «Вектором называется направленный отрезок…», подразумевает конкретный направленный отрезок, взятый из данного множества, который привязан к определённой точке плоскости или пространства.

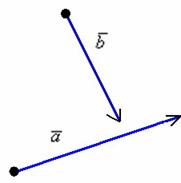
Следует отметить, что с точки зрения физики понятие свободного вектора в общем случае некорректно, и точка приложения имеет значение. Действительно, прямой удар одинаковой силы по носу или по лбу ~~хватит развивать мой дурацкий пример~~ влёчет разные последствия.

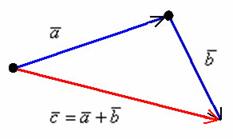
Далее, если не оговаривается иное, речь пойдёт только о свободных векторах.

**Действия с векторами. Коллинеарность векторов**

В школьном курсе геометрии рассматривается ряд действий и правил с векторами: *сложение по правилу треугольника, сложение по правилу параллелограмма, правило разности векторов, умножения вектора на число, скалярное произведение векторов и др.* Для затравки повторим два правила, которые особенно актуальны для решения задач аналитической геометрии.

**Правило сложения векторов по правилу треугольников**

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032.gif:  


Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0000.gif от *конца* вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0001.gif:  


Суммой векторов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0001.gif является вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040.gif. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0003.gif, а затем по вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0002.gif. Тогда сумма векторов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image042.gif представляет собой вектор результирующего пути http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image044.gif с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов. Как говорится, тело может пройти свой путь сильно поддатым по зигзагу, а может и на автопилоте – по результирующему вектору суммы.

Кстати, если вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0003.gif отложить от *начала* вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0004.gif, то получится эквивалентное *правило параллелограмма* сложения векторов.

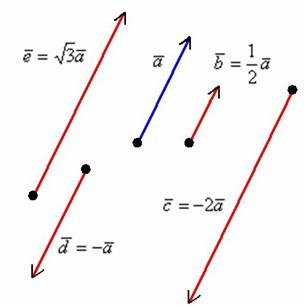
**Умножение вектора на число**

Сначала о коллинеарности векторов. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Грубо говоря, речь идёт о параллельных векторах. Но применительно к ним всегда используют прилагательное «коллинеарные».

Представьте два коллинеарных вектора. Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

**Обозначения:** коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image046.gif, при этом возможна детализация: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image048.gif (векторы сонаправлены) или http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image050.gif (векторы направлены противоположно).

**Произведением** ненулевого вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0005.gif на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052.gif является такой вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0004.gif, длина которого равна http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image055.gif, причём векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0006.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0005.gif сонаправлены при http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image058.gif и противоположно направлены при http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image060.gif.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:  


Разбираемся более детально:

1) Направление. Если множитель http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0000.gif отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Длина. Если множитель заключен в пределах http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image065.gif или http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image067.gif, то длина вектора уменьшается. Так, длина вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image069.gif в два раза меньше длины вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071.gif. Если множитель http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0001.gif по модулю больше единицы, то длина вектора увеличивается в http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image052_0002.gif раз.

3) Обратите внимание, что **все векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image073.gif. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

4) Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image075.gif сонаправлены. Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image078.gif также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

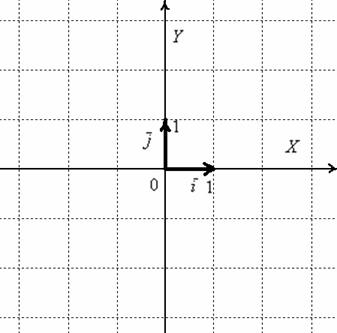
**Какие векторы являются равными?**

**Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину**. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

С точки зрения понятия свободного вектора, равные векторы – это один и тот же вектор, о чём уже шла речь в предыдущем параграфе.

**Координаты вектора на плоскости и в пространстве**

Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image080.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image082.gif:



Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image080_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image082_0000.gif **ортогональны**. Ортогональны = Перпендикулярны. Рекомендую потихоньку привыкать к терминам: вместо параллельности и перпендикулярности используем соответственно слова *коллинеарность* и *ортогональность*.

**Обозначение:** ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image088.gif.

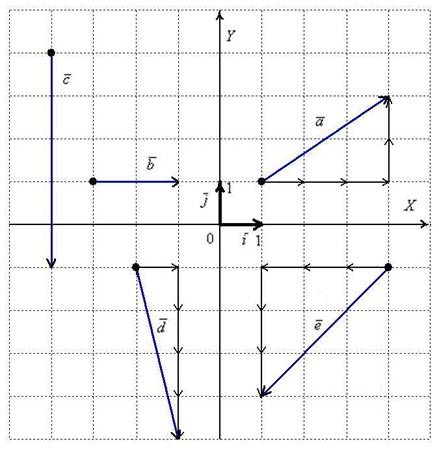
Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Что такое базис, думаю, интуитивно многим понятно.Простыми словами, базис и начало координат задают всю систему – это своеобразный фундамент, на котором кипит полная и насыщенная геометрическая жизнь.

Иногда построенный базис называют *ортонормированным* базисом плоскости: «орто» – потому что координатные векторы ортогональны, прилагательное «нормированный» означает единичный, т.е. длины векторов базиса равны единице.

**Обозначение:** базис обычно записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image090.gif. Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

**Любой** вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092.gif плоскости **единственным образом** выражается в виде:  
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094.gif, где http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image096.gif – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094_0000.gif называется **разложением вектора** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092_0000.gif **по базису** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image090_0000.gif.

Ужин подан:



**!** ВСЕМ настоятельно рекомендую прочитать ВСЁ!

Начнем с первой буквы алфавита: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image102.gif. По чертежу хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются только что рассмотренные:

1. правило умножения вектора на число: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image104.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image106.gif;
2. сложение векторов по правилу треугольника: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image108.gif.

А теперь мысленно отложите вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0000.gif от любой другой точки плоскости. Совершенно очевидно, что его разложение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111.gif будет «неотступно следовать за ним». Вот она, свобода вектора – вектор «всё носит при себе». Это свойство, разумеется, справедливо для любого вектора. Забавно, что сами базисные (свободные) векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113.gif не обязательно откладывать от начала координат, один можно нарисовать, например, слева внизу, а другой – справа вверху, и от этого ничего не изменится! Правда, делать так не нужно, поскольку преподаватель тоже проявит оригинальность и нарисует вам «зачтено» в неожиданном месте.

Векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117.gif иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115_0000.gif сонаправлен с базисным вектором http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119.gif, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117_0000.gif направлен противоположно по отношению к базисному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image122.gif. У данных векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так:

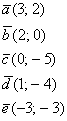
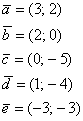
http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image124.gif

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image126.gif

А базисные векторы, к слову, так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image128.gif (по сути, они выражаются сами через себя).

И, наконец: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image130.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image132.gif.

Рассмотренное разложение вида http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image094_0001.gif иногда называют разложением вектора *в системе орт* (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

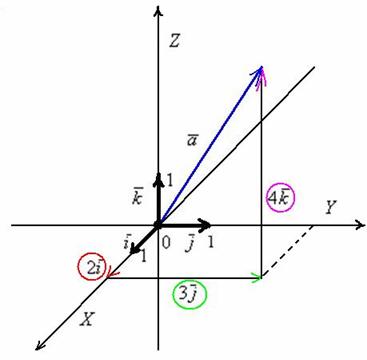
 Или со знаком равенства: 

Сами базисные векторы записываются так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image143.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image145.gif

То есть, в круглых скобках указываются координаты вектора. В практических задачах используются все три варианта записи.

Сомневалась, говорить ли, но всё-таки скажу: **координаты векторов переставлять нельзя**. **Строго на первом месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119_0000.gif, **строго на втором месте** записываем координату, которая соответствует единичному вектору http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image122_0000.gif. Действительно, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image148.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image150.gif – это ведь два разных вектора.

С координатами на плоскости разобрались. Теперь рассмотрим векторы в трехмерном пространстве, здесь практически всё так же! Только добавится ещё одна координата. Трехмерные чертежи выполнять тяжко, поэтому ограничусь одним вектором, который для простоты отложу от начала координат:



Перед вами *ортонормированный* базис http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image154.gif трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image156.gif данного базиса попарно ортогональны: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image158.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image160.gif. Ось http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image162.gif наклонена под углом 45 градусов только для того, чтобы складывалось визуальное впечатление пространства.

**Любой** вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image092_0001.gif трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по ортонормированному базису http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image154_0000.gif: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image166.gif, где http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image168.gif – координаты вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image170.gif (числа) в данном базисе.

Пример с картинки: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172.gif. Давайте посмотрим, как здесь работают правила действий с векторами. Во-первых, умножение вектора на число: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174.gif (красная стрелка), http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image176.gif (зеленая стрелка) и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178.gif (малиновая стрелка). Во-вторых, перед вами пример сложения нескольких, в данном случае трёх, векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180.gif. Вектор суммы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0001.gif начинается в исходной точке отправления (начало вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174_0000.gif) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178_0000.gif).

Все векторы трехмерного пространства, естественно, тоже свободны, попробуйте мысленно отложить вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image071_0002.gif от любой другой точки, и вы поймёте, что его разложение http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180_0000.gif «останется при нём».

Аналогично плоскому случаю, помимо записи http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172_0000.gif широко используются версии со скобками: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image186.gif либо http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image188.gif.

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры: вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image190.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image192.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image194.gif; вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image196.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image198.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image200.gif; вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image202.gif (дотошно http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image204.gif) – запишем http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image206.gif.

Базисные векторы записываются следующим образом:

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image208.gif

Вот, пожалуй, и все минимальные теоретические знания, необходимые для решения задач аналитической геометрии. Возможно многовато терминов и определений, поэтому рекомендую перечитать и осмыслить данную информацию ещё раз. Да и любому читателю будет полезно время от времени обращаться к базовому уроку для лучшего усвоения материала. Коллинеарность, ортогональность, ортонормированный базис, разложение вектора – эти и другие понятия будут часто использоваться в дальнейшем. Отмечу, что материалов данной статьи недостаточно для сдачи экзамена, так как все теоремы (к тому же без доказательств) я аккуратно шифрую – в ущерб научному стилю изложения, но плюсом к вашему пониманию предмета. Для получения обстоятельной теоретической справки прошу следовать на поклон к профессору Атанасяну.

А мы переходим к практической части:

**Простейшие задачи аналитической геометрии. Действия с векторами в координатах**

Задания, которые будут рассмотрены, крайне желательно научиться решать на полном автомате, а формулы **запомнить наизусть**, даже специально не запоминать, сами запомнятся =) Это весьма важно, поскольку на простейших элементарных примерах базируются другие задачи аналитической геометрии, и будет досадно тратить дополнительное время на поедание пешек. Не нужно застёгивать верхние пуговицы на рубашке, многие вещи знакомы вам со школы.

Изложение материала пойдет параллельным курсом – и для плоскости, и для пространства. По той причине, что все формулы… сами увидите.

**Как найти вектор по двум точкам?**

Если даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004_0000.gif, то вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0000.gif имеет следующие координаты: Как составить вектор по двум точкам на плоскости

Если даны две точки пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0001.gif, то вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0001.gif имеет следующие координаты: Как составить вектор по двум точкам в пространстве

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Задание: Для тех же точек запишите формулы нахождения координат вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0000.gif. Формулы в конце урока.

Пример 1

Даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image018_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image020_0000.gif. Найти координаты вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0002.gif

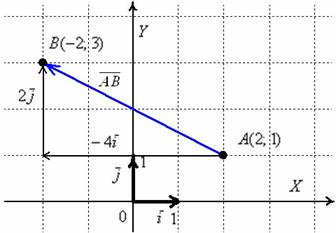
**Решение:** по соответствующей формуле: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022_0007.gif

Как вариант, можно было использовать следующую запись: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image024_0000.gif

Эстеты решат и так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image026_0000.gif

Лично я привыкла к первой версии записи.

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image028_0000.gif

По условию не требовалось строить чертежа (что характерно для задач аналитической геометрии), но в целях пояснения некоторых моментов, не поленюсь:  


Обязательно нужно понимать **различие между координатами точек и координатами векторов**:

**Координаты точек** – это обычные координаты в прямоугольной системе координат. Откладывать точки на координатной плоскости, думаю, все умеют ещё с 5-6 класса. Каждая точка обладает строгим местом на плоскости, и перемещать их куда-либо нельзя.

**Координаты же вектора** – это его разложение по базису http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0006.gif, в данном случае http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image034.gif. Любой вектор является свободным, поэтому при желании или необходимости мы легко можем отложить его от какой-нибудь другой точки плоскости (во избежание путаницы переобозначив, например, через http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022.gif). Интересно, что для векторов можно вообще не строить оси, прямоугольную систему координат, нужен лишь базис, в данном случае ортонормированный базис плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0007.gif.

Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image036.gif, а **смысл координат** абсолютно **разный**, и вам следует хорошо понимать эту разницу. Данное отличие, разумеется, справедливо и для пространства.

Дамы и господа, набиваем руку:

Пример 2

а) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image038.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0001.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0003.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0001.gif.

б) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image043.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image045.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image047.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image049.gif.

в) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image051.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image053.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image055_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image057.gif.

г) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image059.gif. Найти векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image061.gif.

Пожалуй, достаточно. Это примеры для самостоятельного решения, постарайтесь ими не пренебрегать, окупится ;-). Чертежи делать не нужно. Решения и ответы в конце урока.

**Что важно при решении задач аналитической геометрии?** Важно быть ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫМ, чтобы не допустить мастерскую ошибку «два плюс два равно нулю». Сразу извиняюсь, если где ошиблась =)

**Как найти длину отрезка?**

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image002_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image004_0001.gif, то длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064.gif можно вычислить по формуле Формула длины отрезка на плоскости

Если даны две точки пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image010_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image012_0002.gif, то длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0000.gif можно вычислить по формуле Формула длины отрезка в пространстве

***Примечание:*** *Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image070.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image072.gif, но более стандартен первый вариант*

Пример 3

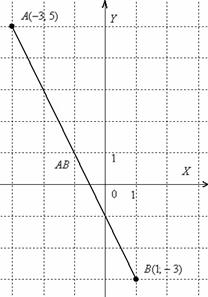
Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image074.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0002.gif. Найти длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0001.gif.

**Решение:** по соответствующей формуле:

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image077.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image079.gif

Для наглядности выполню чертёж



Отрезок http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0002.gif – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя. Кроме того, если вы выполните чертеж в масштабе: 1 ед. = 1 см (две тетрадные клетки), то полученный ответ http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image083.gif можно проверить обычной линейкой, непосредственно измерив длину отрезка.

Да, решение короткое, но в нём есть ещё пара важных моментов, которые хотелось бы пояснить:

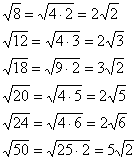
Во-первых, в ответе ставим размерность: «единицы». В условии не сказано, ЧТО это, миллиметры, сантиметры, метры или километры. Поэтому математически грамотным решением будет общая формулировка: «единицы» – сокращенно «ед.».

Во-вторых, повторим школьный материал, который полезен не только для рассмотренной задачи:

Читаем!!!

Обратите внимание на **важный технический приём** – **вынесение множителя из-под корня**. В результате вычислений у нас получился результат http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image085.gif и хороший математический стиль предполагает вынесение множителя из-под корня (если это возможно). Подробнее процесс выглядит так: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image087.gif. Конечно, оставить ответ в виде http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image085_0000.gif не будет ошибкой – но недочетом-то уж точно и весомым аргументом для придирки со стороны преподавателя.

Вот другие распространенные случаи:



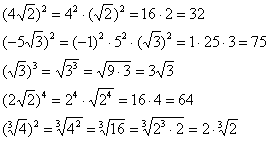
Нередко под корнем получается достаточно большое число, например http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image091.gif. Как быть в таких случаях? На калькуляторе проверяем, делится ли число на 4: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image093.gif. Да, разделилось нацело, таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image095.gif. А может быть, число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image097.gif ещё раз удастся разделить на 4? http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image099.gif. Таким образом: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image101.gif. У числа http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image103.gif последняя цифра нечетная, поэтому разделить в третий раз на 4 явно не удастся. Пробуем поделить на девять: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image105.gif. В результате:

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image107.gif Готово.

**Вывод:** если под корнем получается неизвлекаемое нацело число, то пытаемся вынести множитель из-под корня – на калькуляторе проверяем, делится ли число на: 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т.д.

В ходе решения различных задач корни встречаются часто, всегда пытайтесь извлекать множители из-под корня во избежание более низкой оценки да ненужных заморочек с доработкой ваших решений по замечанию преподавателя.

Давайте заодно повторим возведение корней в квадрат и другие степени:



Правила действий со степенями в общем виде можно найти в школьном учебнике по алгебре, но, думаю, из приведённых примеров всё или почти всё уже ясно.

Задание для самостоятельного решения с отрезком в пространстве:

Пример 4

Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113_0000.gif. Найти длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0004.gif.

Решение и ответ в конце урока.

**Как найти длину вектора?**

Если дан вектор плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image115_0001.gif, то его длина вычисляется по формуле Формула длины вектора на плоскости.

Если дан вектор пространства http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image119_0001.gif, то его длина вычисляется по формуле Формула длины вектора в пространстве.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью небезызвестной теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image074_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0003.gif. Найти длину вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0004.gif.

Я взяла те же точки, что и в Примере 3.

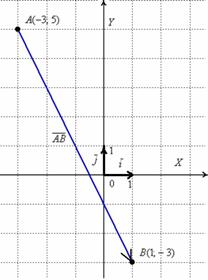
**Решение:** Сначала найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0005.gif: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image124_0000.gif

По формуле http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image117_0001.gif вычислим длину вектора: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image127.gif

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image129.gif

Не забываем указывать размерность – «единицы»! Всегда ли, кстати, нужно рассчитывать приближенное значение (в данном примере 8,94), если этого не требуется в условии? С моей точки зрения, лишним не будет, отсутствие приближенного значения тянет на придирку. Округление целесообразно проводить до 2-3 знаков после запятой.

Выполним чертеж к задаче:



В чём принципиальное отличие от Примера 3? Отличие состоит в том, что **здесь речь идёт о векторе**, а не об отрезке. Вектор можно переместить в любую точку плоскости, при этом его лучше переобозначить, например, через http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image022.gif.

А в чём сходство Примера 3 и Примера 5? Геометрически очевидно, что длина отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0005.gif равна длине вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0006.gif. Так же очевидно, что длина вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0002.gif будет такой же. По итогу: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image135.gif

Задачу 3 можно было решить и вторым способом, повторю условие: Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image074_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image040_0004.gif. Найти длину отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0006.gif.

Вместо применения формулы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image066_0000.gif, поступаем так:

1) Находим вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image124_0001.gif.

2) А теперь ссылаемся на то, что длина отрезка http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image064_0007.gif равна длине вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image006_0007.gif:

http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image138.gif

Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

Вышесказанное справедливо и для пространственного случая

Для тренировки:

Пример 6

а) Даны точки http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image140.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image142.gif. Найти длину вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0003.gif.

б) Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image145_0000.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image147.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image149.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image151.gif. Найти их длины.

Решения и ответы в конце урока.

**Действия с векторами в координатах**

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image153.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image155.gif. Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image157.gif. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image159.gif. Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image161.gif и найдём сумму трёх векторов: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image163.gif

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image165.gif, то их суммой является вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image167.gif.

2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image153_0000.gif умножить на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image169.gif, нужно каждую координату данного вектора умножить на число http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image169_0000.gif: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image172_0001.gif.

Для пространственного вектора http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image174_0001.gif правило такое же: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image176_0000.gif

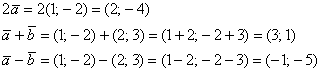
Приведённые факты строго доказываются в курсе аналитической геометрии.

***Примечание:*** *Данные правила справедливы не только для ортонормированных базисов http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0008.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image178_0001.gif но и для произвольного аффинного базиса плоскости или пространства*.

Пример 7

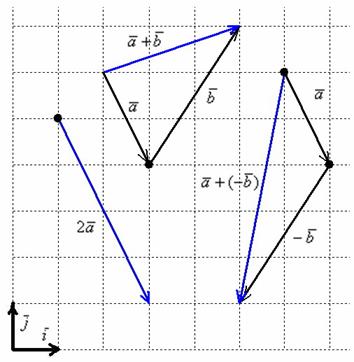
Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image180_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image182.gif. Найти http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image184.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image186_0000.gif

**Решение** чисто аналитическое:



**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image190_0000.gif

Чертеж в подобных задачах строить не надо, тем не менее, геометрическая демонстрация будет весьма полезной. Если считать, что векторы заданы в ортонормированном базисе http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image032_0009.gif, то графическое решение задачи будет таким:



Коль скоро речь идет **только** о векторах в ортонормированном базисе, то оси рисовать не обязательно. Достаточно начертить базисные векторы, причём, где угодно. Ну, и координатную сетку для удобства. Строго говоря, ранее я допустила небольшой огрех – в некоторых чертежах урока тоже можно было не чертить декартову прямоугольную систему координат. Векторам она не нужна, им нужен базис. Впрочем, лучше всегда рисуйте, а то напугаете всех своими знаниями =)

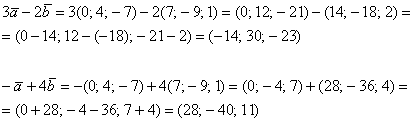
Как видите, графический способ решения привёл к тем же результатам, что и аналитический способ решения. Ещё раз заметьте свободу векторов: любую из трёх «конструкций» можно переместить в любую точку плоскости.

Для векторов в пространстве можно провести аналогичные выкладки. Но там чертежи строить значительно сложнее, поэтому ограничусь аналитическим решением (на практике, собственно, бОльшего и не надо):

Пример 8

Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image194_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image196_0000.gif. Найти http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image198_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image200_0000.gif

**Решение:** Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:



**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image204_0000.gif

И в заключение занятный пример с векторами на плоскости:

Пример 9

Даны векторы http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image206_0000.gif. Найти http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image208_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image210.gif

Это задача для самостоятельного решения.

Какой вывод? Многие задачи аналитической геометрии прозрачны и просты, главное, не допустить вычислительных ошибок. Следующие рекомендуемые к самостоятельному изучению уроки:

**Скалярное произведение векторов**

**Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов**

**Векторное и смешанное произведение векторов**

Любите векторы, и векторы полюбят вас!

Решения и ответы:

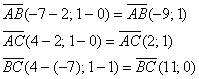
*Задание: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image212.gif, http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image214.gif*

*Пример 2:* ***Решение:***

*а)*

*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image216.gif*

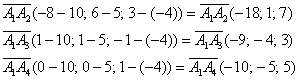
*б)*

**

*в)*

*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image220.gif*

*г)*

**

*Пример 4:* ***Решение:***

*По соответствующей формуле:*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image111_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image113_0001.gif

*http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image224.gif*

***Ответ:***http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image226.gif

*Пример 6:* http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image140_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image142_0000.gif

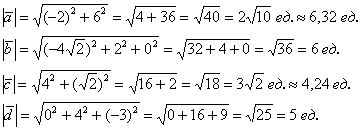
*а)* ***Решение:*** *найдём вектор http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image016_0004.gif: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image230.gif*

*Вычислим длину вектора: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image232.gif*

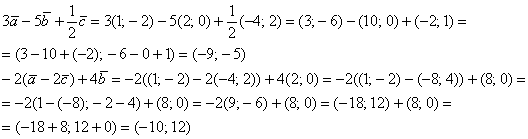
***Ответ:*** *http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image234.gif*

*б)* ***Решение:***

*Вычислим длины векторов:*

**

*Пример 9:* ***Решение:***

**

***Примечание:*** *Перед выполнением действий можно предварительно раскрыть скобки: http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image240.gif*

***Ответ:*** *http://www.mathprofi.ru/d/vektory_dlya_chainikov_clip_image242.gif*