1. Дисциплина: Математика
2. Преподаватель: Пахомова А.А.
3. Название темы: Геометрические фигуры на плоскости (6 часов)

**Теоретический блок**

**МНОГОУГОЛЬНИКИ**

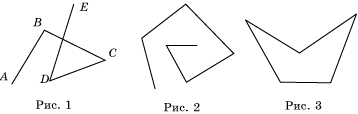
**Общие свойства многоугольников**

Многоугольники составляют основу геометрии. От того, насколько хорошо освоено это понятие, во многом зависит успешность изучения всей геометрии.

Здесь мы рассмотрим свойства многоугольников, расширяющие и углубляющие содержание школьной программы.

Предлагаемый материал может быть использован для обобщающего повторения, при проведении элективных курсов, подготовки учащихся к конкурсам и олимпиадам по математике.

Напомним, что ломаной называется фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т.д. (рис. 1). Отрезки называются сторонами ломаной, а их концы – вершинами ломаной.



Ломаная обозначается последовательным указанием ее вершин. Напри­мер, ломаная *АВСDE*, ломаная *A*1*A*2…*An*.

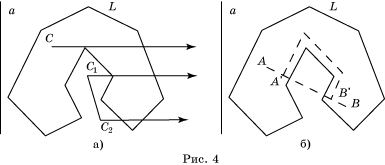
Ломаная называется простой, если она не имеет точек самопересече­ния (рис. 2).

Ломаная называется замкнутой, если начало первого отрезка ломаной совпадает с концом последне­го. Замкнутую ломаную, у которой точ­ками самопересечения являются только начальная и конечная точки также называют простой (рис. 3).

Одной из важнейших теорем о простых замкнутых ломаных является следующая теорема.

**Теорема 1 (теорема Жордана).** Всякая простая замкнутая ломаная на плоскости разбивает точки плоскости на две области – внутреннюю и внешнюю. При этом всякие две точки из одной области могут быть соединены ломаной, целиком содержащейся в этой области. Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, их соединяющая, пересекается с исходной ломаной.

**Доказательство.**Пусть *L*– заданная простая замкнутая ломаная (рис. 4). Выберем на плоскости какую-нибудь прямую *a*, не перпендикулярную ни одной из сторон ломаной *L.*Так как число сторон ломаной конечно, то такая прямая существует.



Для точки *C*плоскости, не принадлежащей ломаной *L*, рассмотрим луч с вершиной *C*, перпендикулярный *a*. Заметим, что ни одна из сторон ломаной не будет целиком лежать на этом луче. Подсчитаем число точек пересечения этого луча с ломаной *L.* При этом, если рассматриваемый луч проходит через вершину ломаной, то эта вершина идет в счет или не идет, в зависимости от того, расположены ли прилежащие к этой вершине стороны многоугольника по разные или по одну сторону от данного луча. Если число пересечений нечетно, то точку *C*отнесем к внутренней области. Если число точек пересечения четно, то точку *C*отнесем к внешней области.

Заметим, что если отрезок не пересекается с ломаной, то все его точки имеют одинаковую четность. Действительно, четность точки движущейся по такому отрезку, может измениться только при прохождении соответствующего луча через вершину ломаной. Но, принимая во внимание принятый подсчет точек пересечения, в каждом из двух возможных случаев четность изменится.

Из сказанного следует, что если какая-нибудь ломаная соединяет две точки разной четности, то она пересекается с *L*. Иначе четность всех точек ломаной, а значит, конечной и начальной точек, была бы одинаковой.

Пусть теперь *A*и *B*– две точки одинаковой четности. Покажем, что их можно соединить ломаной, не пересекающейся с *L*. Действительно, если отрезок *AB* не пересекается с ломаной, то он является искомой ломаной. Пусть отрезок *AB*пересекается с ломаной. Обозначим *A’* и *B’*соответственно первую и последнюю точку пересечения. Построим ломаную, начинающуюся в точке *A* и заканчивающуюся в *B*. Сначала она идет по отрезку *AA’.*Перед точкой *A’*она поворачивает и идет вдоль ломаной *L*(безразлично, в каком из двух возможных направлений) до тех пор, пока снова не пересечет отрезок *AB*около точки *B’*. Выбирая ломаную достаточно близко к ломаной *L*, можно добиться, чтобы она не пересекалась с *L*.

Весь вопрос в том, кончается ли построенная ломаная на отрезке *A’B’* или на отрезке *B’B*. Покажем, что первое невозможно. Действительно, если две точки расположены близко друг к другу, но по разные стороны от одной из сторон ломаной *L*, то они будут иметь разную четность, так как выходящие из них лучи будут таковы, что один из них будет иметь на одну точку пересечения с *L*больше чем другой.

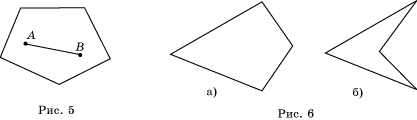
Таким образом, точки отрезков *A’B’* и *B’B,*расположенные близко к *B’*, имеют различную четность. Следовательно, точки отрезка *A’B’*, расположенные близко к *B’*, не могут быть соединены ломаной с точкой *A*и, значит, построенная ломаная заканчивается на отрезке *BB’*.

Завершим построение ломаной, соединив отрезком ее последнюю точку с точкой *B*. В результате получим искомую ломаную, соединяющую точки *A* и *B.*

Доказанная теорема позволяет дать определение многоугольника.

Многоугольником называется фигу­ра, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью. Вершины ломаной назы­ваются вершинами многоугольника, стороны – сторонами многоу­гольника, а углы, образованные соседними сторонами - углами многоу­гольника. Точки многоугольника, не лежащие на его сторонах, называются внутренними.

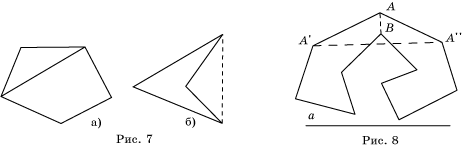
Многоугольник называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 5).



Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом уг­лов большим трех могут быть выпуклые и невыпуклые (рис. 6).

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его не­ соседние вершины.

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали. Не­выпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 7), однако имеет место следующая теорема.



**Теорема 2.**В каждом многоугольнике с числом сторон большим трех можно провести диагональ, целиком в нем содержащуюся.

**Доказательство.**Для данного многоугольника *M*зафиксируем какую-нибудь прямую *a*, и найдем вершину *A*многоугольника, расстояние от которой до этой прямой наибольшее. Пусть *A’, A’’*– соседние с ней вершины (рис. 8). Если отрезок *A’A’’* целиком содержится в многоугольнике *M*, то он является искомой диагональю. Если *A’A’’* не содержится целиком в *M*, то существуют вершины многоугольника *M,*содержащиеся в треугольнике *A’AA’’*. Выберем из них вершину *B*, наиболее удаленную от прямой *a*. Тогда отрезок *AB* будет целиком содержаться в многоугольнике и, следовательно, он является искомой диагональю.

**Следствие.**Любой *n-*угольник можно разбить на треугольники, причем число таких треугольников будет равно *n-*2.

Действительно, по доказанной теореме, многоугольник можно разбить на два многоугольника, проведением диагонали. Продолжая процесс проведения диагоналей, мы, в конце концов, дойдем до треугольников, на которые будет разбит наш многоугольник.

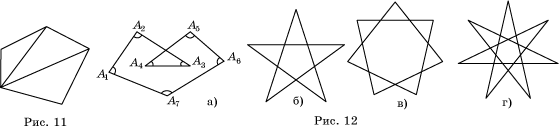
Докажем индукцией по *n*, что число таких треугольников равно *n* – 2. Для *n =*3 утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали, что любой *m*-угольник при *m* < *n* проведением диагоналей разбивается на *m*-2 треугольника. Рассмотрим *n*-угольник. Проведением диагонали, он разбивается на *i*-угольник и (*n* – *i*+2)-угольник. Каждый из них, по предположению индукции, разбивается на *i* – 2 и *n* – *i*треугольника, которые вместе составляют разбиение *n*-угольника на *n*-2 треугольника.

**Сумма углов многоугольника**

В основном курсе геометрии доказывается, что сумма углов выпуклого *n*-угольника равна 180° (*n*-2). Оказывается, что это утверждение справедливо и для невыпуклых многоугольников.

**Теорема 3.**Сумма углов произвольного *n*-угольника равна 180° (*n*– 2).

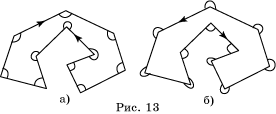
**Доказательство.** Разобьем многоугольник на треугольники, проведением диагоналей (рис. 11). Число таких треугольников равно *n-*2, и в каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Поскольку углы треугольников составляют углы многоугольника, то сумма углов многоугольника равна 180° (*n* – 2).



Рассмотрим теперь произвольные замкнутые ломаные, возможно с самопересечениями *A*1*A*2…*AnA*1 (рис. 12, а). Такие самопересекающиеся ломаные будем называть звездчатыми многоугольниками (рис. 12, б-г).

Зафиксируем направление подсчета углов против часовой стрелки. Заметим, что углы, образованные замкнутой ломаной, зависят от направления ее обхода. Если направление обхода ломаной меняется на противоположное, то углами многоугольника будут углы, дополняющие углы исходного многоугольника до 360°.

Если *M*– многоугольник, образован простой замкнутой ломаной, проходимой в направлении по часовой стрелке (рис. 13, а), то сумма углов этого многоугольника будет равна 180° (*n* – 2). Если же ломаная проходится в направлении против часовой стрелки (рис. 13, б), то сумма углов будет равна 180° (*n* + 2).



Таким образом, общая формула суммы углов многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, имеет вид

http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image014.gif = 180° (*n http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image016.gif*2),

где http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image017.gif - сумма углов, *n*– число углов многоугольника, «+» или «-» берется в зависимости от направления обхода ломаной.

Наша задача состоит в том, чтобы вывести формулу суммы углов произвольного многоугольника, образованного замкнутой (возможно самопересекающейся) ломаной. Для этого введем понятие степени многоугольника.

Степенью многоугольника называется число оборотов, совершаемой точкой при полном последовательном обходе его сторон. Причем обороты, совершаемые в направлении против часовой стрелки, считаются со знаком «+», а обороты по часовой стрелке – со знаком «-».

Ясно, что у многоугольника, образованного простой замкнутой ломаной, степень равна +1 или –1 в зависимости от направления обхода. Степень ломаной на рисунке 12, а равна двум. Степень звездчатых семиугольников (рис. 12, в, г) равна соответственно двум и трем.

Аналогичным образом понятие степени определяется и для замкнутых кривых на плоскости. Например, степень кривой, изображенной на рисунке 14 равна двум.



Для нахождения степени многоугольника или кривой можно поступать следующим образом. Предположим, что, двигаясь по кривой (рис. 15, а), мы, начиная с какого-то места *A*1, совершили полный оборот, и попали в ту же точку *A*1. Удалим из кривой соответствующий участок и продолжим движение по оставшейся кривой (рис. 15,б). Если, начиная с какого-то места *A*2, мы снова совершили полный оборот и попали в ту же точку, то удаляем соответствующий участок кривой и продолжаем движение (рис. 15, в). Считая количество удаленных участков со знаками «+» или «-», в зависимости от их направления обхода, получим искомую степень кривой.

**Теорема 4.**Для произвольного многоугольника имеет место формула

http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image019.gif= 180° (*n*+2*m*),

где http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image020.gif - сумма углов, *n*– число углов, *m*– степень многоугольника.

**Доказательство.** Пусть многоугольник *M* имеет степень *m*и условно изображен на рисунке 16. *M*1, …, *Mk*– простые замкнутые ломаные, проходя по которым, точка совершает полные обороты. *A*1, …, *Ak*– соответствующие точки самопересечения ломаной, не являющиеся ее вершинами.

Обозначим число вершин многоугольника *M*, входящих в многоугольники *M*1, …, *Mk* через *n*1, …, *nk* соответственно. Поскольку, помимо вершин многоугольника *M*, к этим многоугольникамдобавляются еще вершины *A*1, …, *Ak*, то число вершин многоугольников *M*1, …, *Mk* будет равно соответственно *n*1+1, …, *nk*+1. Тогда суммы их углов будут равны 180° (*n*1+1http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image022.gif2), …, 180° (*nk*+1http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image023.gif2). Плюс или минус берется в зависимости от направления обхода ломаных.

Сумма углов многоугольника *M*0, оставшегося от многоугольника *M* после удаления многоугольников *M*1, …, *Mk*, равна 180° (*n*-*n*1- …-*nk*+*k*http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image024.gif2).

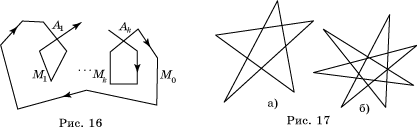
Суммы углов многоугольников *M*0,*M*1, …, *Mk*дают сумму углов многоугольника *M* и в каждой вершине *A*1, …, *Ak* дополнительно получим 360°. Следовательно, имеем равенство

180° (*n*1+1http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image026.gif2)+…+180° (*nk*+1http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image027.gif2)+180° (*n*-*n*1- …-*nk*+*k*http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image028.gif2)=http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image030.gif+360°*k*.

Приводя подобные члены, получим

http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image031.gif= 180° (*n*http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image032.gif2http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image033.gif…http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image034.gif2) = 180° (*n+*2*m*),

где *m* – степень многоугольника *M*.



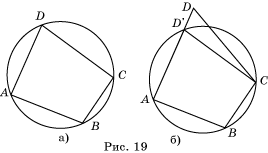
В качестве примера рассмотрим вычисление суммы углов пятиконечной звездочки (рис. 17, а). Степень соответствующей замкнутой ломаной равна –2. Поэтому искомая сумма углов равна 180http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image037.gif.

**Вписанные многоугольники**

В основном курсе геометрии доказывается, что около всякого треугольника можно описать окружность. Оказывается, для четырехугольников это уже не имеет место.

**Теорема 5.**Около четырехугольника можно описать окружность, тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

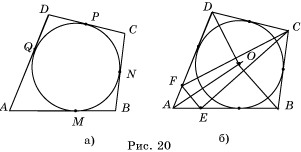
**Доказательство.** Пусть *ABCD* - четырехугольник, около которого опи­санаокружность (рис. 19, а). Докажем, что Ð*B +*Ð*D =*180°. Действительно, эти углы измеряются половинами соответствующих дуг *ADC* и *ABC*, которые вместе составляют всю окружность. Следовательно, сами углы в сумме из­меряются половиной дуги окружности, т.е. их сумма равна 180°.



Обратно, пусть в четырехугольнике *ABCD*сумма противоположных углов равна 180°. Через вершины *A, B, C*проведем окружность. Предположим, что эта окружность не проходит через вершину *D* (рис. 19, б). Обозначим точку пересечения окружности *с* прямой *AD* через *D’*. Тогда четырехугольник *ABCD’* вписан в окружность и, следовательно, Ð*B +*Ð*D’*=180°. Но по условию Ð*B +*Ð*D*= 180°. Поэтому Ð*D =*Ð*D’*, что невозможно, так как прямые *DC*и *D’C* не являются параллельными. Полученное противоречие показывает, что окружность, проходящая через точки *A, B* и *C*должна пройти и через точку *D*.

**Теорема 6.**В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, тогда и только тогда, когда сум­мы его противоположных сторон равны.

**Доказательство.** Пусть *ABCD* - четырехугольник, в который вписана окружность, касающаяся его сторон в точках *M, N, P, Q* (рис. 20, а). Дока­жем, что *AB + CD = BC + AD*. Действительно, из равенства отрезков каса­тельных, проведенных к окружности из одной точки следуют равенства: *AM = AQ, BM = BN, CN = CP, DP = DQ.* Поэтому, *AB + CD = AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC = AD + BC.*

**

Обратно, пусть в выпуклом четырехугольнике *ABCD*выполняется равенство *AB + CD = BC + AD*. Покажем, что в него можно вписать окружность. Для этого достаточно проверить, что биссектрисы углов этого четырехугольника пересекаются в одной точке. Эта точка будет равноудалена от всех сторон четырехугольника и, следовательно, будет центром искомой вписанной окружности. Если в данном четырехугольнике выполняется равенство *AB=BC*, то этот четырехугольник ромб. Ясно, что биссектрисы углов ромба пересекаются в одной точке – точке пересечения его диагоналей. Пусть *ABhttp://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image042.gifBC*. Предположим для определенности *AB > BC* (рис. 20, б). Из условия *AB + CD = BC + AD* следует, что *AB – BC = AD – CD.* Возьмем на *AB*точку *E*так, что *BE=BC.*Тогда *AE = AB-BC.*Возьмем на *AD*точку *F*так, что *DF=DC.*Тогда *AF = AD – CD.*Следовательно, *AE=AF.*

Треугольники *AEF, BCE, CDF*– равнобедренные. Поэтому биссектрисы углов *A, B, D*являются серединными перпендикулярами к отрезкам *EF, EC, CF.* Следовательно, они пересекаются в одной точке – центре окружности, описанной около треугольника *EFC*. Эта точка будет равноудалена от всех сторон исходного четырехугольника, т.е. будет искомым центром вписанной окружности.

Теорема Птолемея для четырехугольника, вписанного в окружность, утверждает, что произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон. Мы докажем более сильную теорему.

**Теорема 7.** Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается только в случае четырехугольника, вписанного в окружность.

**Доказательство.** Пусть *ABCD* – четырехугольник. Воспользуемся инверсией с центром в точке *A* и радиусом *R*(рис. 21). Напомним, что при инверсии точкам *X*, отличным от *A*, сопоставляются точки *X’* на луче *AX*, для которых http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image044.gif При этом окружности, не проходящие через точку *A*, переходят в окружности, а окружности, проходящие через точку *A*, за исключением самой точки *A*, переходят в прямые.

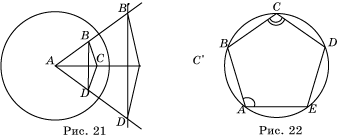
Пусть точки *B*, *C* и *D* переходят соответственно в точки *B’*, *C’* и *D’*. Тогда треугольники *ABC* и *A’C’B’*, *ADC* и *AC’D’*, *ABD*и*AD’B’*подобны и, следовательно, имеют место равенства

http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image046.gif

Складывая почленно эти равенства, получим

http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image048.gif

Следовательно, имеет место неравенство http://vasmirnov.ru/Art/Lecture2.files/image050.gif При этом, равенство достигается только в случае, когда точки *B’*, *C’*, *D’* принадлежат одной прямой. Это выполняется только в случае, если точки *B*, *C*, *D* принадлежат окружности, проходящей через точку *A*.



Рассмотрим теперь пятиугольники, вписанные в окружность.

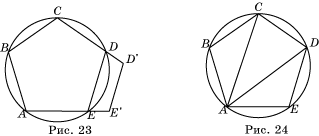
**Теорема 8.** Сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180°.

Доказательство следует из того, что углы *A* и *C* пятиугольника *ABCDE*опираются на дуги, в сумме составляющие всю окружность плюс дугу *DE* (рис. 22).

Естественный вопрос, который возникает после этого – является полученное условие достаточным для того, чтобы около пятиугольника можно было описать окружность?

Ответ: Нет.

Пример такого пятиугольника легко построить. Возьмем какой-нибудь вписанный пятиугольник *ABCDE* (рис. 23) и, продолжая две его стороны, построим пятиугольник *ABCD’E’* так, чтобы сторона *D’E’* была параллельна *DE*. Тогда углы этого пятиугольника будут равны углам исходного, и около него нельзя описать окружность.



Поставим другой вопрос, связанный с достаточным условием вписанности пятиугольника. Пусть *ABCDE* – пятиугольник, сумма любых двух несмежных углов которого больше 180°. Существует ли пятиугольник *A’B’C’D’E’* с такими же углами, около которого можно описать окружность?

Прежде чем ответить на этот вопрос выразим углы между диагоналями вписанного пятиугольника *ABCDE*, выходящими из одной вершины через углы самого пятиугольника.

Легко видеть, что Ð*CAD =*Ð*B +*Ð*E*- 180°. Аналогичным образом выражаются и другие углы (рис. 24).

Вернемся теперь к поставленному вопросу. Для ответа на него рассмотрим какую-нибудь окружность и разделим ее на дуги, равные удвоенным углам между диагоналями исходного пятиугольника, выходящим из одной вершины. Концы этих дуг будут вершинами искомого пятиугольника вписанного в окружность.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 9.** Для произвольного пятиугольника *ABCDE*, суммы любых двух несмежных углов которого больше 180°, существует пятиугольник *A’B’C’D’E’* с такими же углами, около которого можно описать окружность.

Ситуация с вписанными в окружность семиугольниками, девятиугольниками и т. д. аналогична рассмотренной ситуации с пятиугольниками.

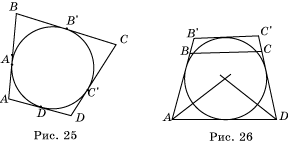
Для вписанных многоугольников с четным числом сторон ситуация аналогична ситуации с вписанным четырехугольником.

**Описанные многоугольники**

Перейдем теперь к рассмотрению описанных многоугольников. Ситуация здесь в некотором смысле двойственная по отношению к вписанным многоугольникам. При этом стороны описанного многоугольника двойственны углам вписанного многоугольника. Так, например, если для вписанности четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных углов, то для описанности выпуклого четырехугольника необходимым и достаточным условием является равенство сумм противоположных сторон. А именно, имеют место следующие теоремы.

**Теорема 10.**Суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны.

**Доказательство.** Пусть четырехугольник *ABCD* описан около окружности (рис. 25), *A’*, *B’*, *C’*, *D’* – точки касания. Тогда *AA’ = AD’*, *BA’ = BB’*, *DC’ = DD’*, *CC’ = CB’*. Складывая почленно эти равенства, получим равенство *AB + CD = AD + BC*, означающее, что суммы противоположных сторон вписанного четырехугольника равны.



**Теорема 11.** Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

**Доказательство.** Пусть в выпуклом четырехугольнике *ABCD* имеет место равенство *AB + CD = BC + AD*. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон углов *A*и *D* (рис. 26). Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис углов *A*и *D*. Предположим, что эта окружность не касается стороны *BC*. Проведем касательную *B’C’*, для которой угол *B’* равен углу *B*. Тогда четырехугольник *AB’C’D* будет описан около окружности и, следовательно, для него будет выполняться равенство *AB’ + C’D = AD + B’C’*. С другой стороны, по условию, выполняется равенство *AB + CD = AD + BC*. Вычитая из первого равенства второе, получим равенство *BB’ +CC’ = B’C’ – BC*, или *B’C’ = BB’ + BC + CC’*. Последнее равенство не может выполняться для точек не лежащих на одной прямой и, значит, неверным было наше предположение о том, что окружность не касается стороны *BC*.

Самостоятельно подумайте, где в доказательстве использовалась выпуклость четырехугольника. Приведите пример невыпуклого четырехугольника, у которого суммы противоположных сторон равны и в который нельзя вписать окружность.

Следующие теоремы, двойственные соответствующим теоремам для вписанных пятиугольников, предлагаем для самостоятельного доказательства.

**Теорема 12.** Сумма любых двух несмежных сторон описанного пятиугольника меньше суммы трех оставшихся сторон.

**Теорема 13.** Для произвольного пятиугольника *ABCDE*, сумма любых двух несмежных сторон которого меньше суммы оставшихся сторон, существует пятиугольник *A’B’C’D’E’* с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

Сформулируем общие теоремы о вписанных и описанных многоугольниках. Их доказательства повторяют доказательства рассмотренных выше частных случаев.

**Теорема I.**Сумма любых *n* несмежных углов вписанного (2*n*+1)-угольника больше 180° (*n*-1).

**Теорема II.** Если сумма любых *n* несмежных углов (2*n*+1)-угольника больше 180° (*n*-1), то существует (2*n*+1)-угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Теорема III.** Сумма *n* несмежных углов вписанного 2*n*-угольника равна 180° (*n*-1).

**Теорема IV.** Если сумма *n* несмежных углов 2*n*-угольника равна 180° (*n*-1), то существует 2*n*-угольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

**Теорема V.**Сумма любых *n* несмежных сторон описанного (2*n*+1)-угольника меньше суммы его остальных сторон.

**Теорема VI.** Если сумма любых *n* несмежных сторон (2*n*+1)-угольника меньше суммы его остальных сторон, то существует (2*n*+1)-угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

**Теорема VII.** Сумма *n* несмежных сторон описанного 2*n*-угольника равна сумме его остальных сторон.

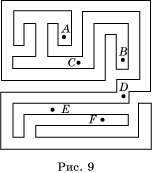
**Теорема VIII.** Если сумма *n* несмежных сторон 2*n*-угольника равна сумме его остальных сторон, то существует 2*n*-угольник с такими же сторонами, в который можно вписать окружность.

**Практический блок**

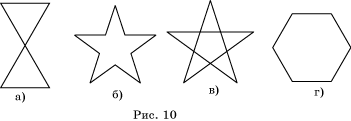
# Задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли, что любая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области?

2. Проверьте, что линия, изображенная на рисунке 9, является простой замкнутой ломаной. Выясните, какие из данных точек лежат внутри, а какие вне этой ломаной.



3. Укажите, какие из представленных на рисунке 10 фигур являют­ся многоугольниками, а какие нет.



4. Сколько диагоналей имеет: а) шестиугольник; б) *n*-угольник?

5. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагона­лей; в) 30 диагоналей?

6. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?

7. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная, состоящая из: а) 4-х сторон; б) 5-ти сторон; в) *n* сторон (*n*– нечетно)?

9. Может ли прямая, не проходящая через вершины простой замкнутой ломаной, пересекать ее стороны в нечетном числе точек?

10. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

11. Сумма углов выпуклого многоугольника равна 900°. Сколько у него сторон?

12. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен: а) 36°; б) 24°?

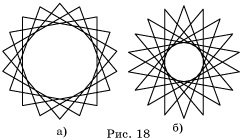
13. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.

14. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

15. Изобразите многоугольник, имеющий четыре острых угла.

16. Найдите суммы углов семиконечной звездочки (рис. 17, б).

17. Чему равны степени звездчатых многоугольников на рисунке 18?



**Задачи для самостоятельного решения**

18. Можно ли описать окружность около: а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба?

19. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы?

20. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны?

21. Можно ли описать окружность около пятиугольника с углами 80°, 90°, 100°, 130°, 140°?

22. Стороны вписанного в окружность четырехугольника *ABCD*равны *AB = a*, *BC = b*, *CD = c*, *AD = d*. Найдите его диагонали.

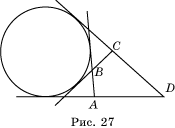
23. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид (рис. 10)?

24. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание. Можно ли в образованный ими выпуклый четырехугольник вписать окружность?

25.Можно ли вписать окружность в четырехугольник со сторонами 1, 2, 3, 4?

26. Противоположные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 7 см и 10 см. Можно ли по этим данным найти периметр четырехугольника?

27. На рисунке 27 изображен четырехугольник *ABCD* и вневписанная в него окружность, касающаяся продолжений всех его сторон. Установите взаимосвязь между сторонами этого четырехугольника.

****

**Контрольно-оценочный блок**

1. Прямая *l* пересекает простую замкнутую ломаную в 2005 точках. Докажите, что существует прямая *l’*, пересекающая эту ломаную более чем в 2005 точках.

2. Докажите, что у выпуклого многоугольника нет углов, большихразвернутого.

3. Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплос­кости относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

4. Докажите, что в любом выпуклом 11-угольнике найдутся две диагонали, угол между которыми не превосходит 5°.

5. Докажите, что сумма любых трех несмежных углов вписанного семиугольника больше 360°.

6. Докажите, что для произвольного семиугольника *ABCDEFG*, суммы любых трех несмежных углов которого больше 360°, существует семиугольник *A’B’C’D’E’F’G’* с такими же углами, около которого можно описать окружность.

7. Докажите, что сумма трех несмежных углов вписанного шестиугольника равна 360°.

8. Докажите, что если сумма трех несмежных углов выпуклого шестиугольника равна 360°, то существует шестиугольник с такими же углами, около которого можно описать окружность.

Дата сдачи 08.12.2020