**Теоретическая и практическая часть по математике для студентов заочного отделения ПНК**

**Преподаватель Кочнева А.Н.**

**Дисциплина ЕН.01 Математика**

**Введение**

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного специалиста в области логистической деятельности.

Основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является математическое обеспечение специальной подготовки, т.е. вооружение студентов, будущих специалистов, математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин, разработки курсовых, расчётно-графических работ и дипломных проектов, для профессиональной деятельности и продолжения образования.

Учебная дисциплина «Математика» является естественнонаучной, формирующей базовые знания для освоения общепрофессиональных и специальных дисциплин.

При изучении математики широко используются современные методы и средства обучения, обеспечивается реализация внутри предметных и межпредметных связей.

**Введение в математический анализ**

Тема 1. Теория пределов

*Определение 1.1.:* Число А называется **пределом функции *y=f(х)***при *х,* стремящемсяк  *а*, если для любой последовательности чисел *х1, х2, х3, …, .хn ,…* сходящейся к числу *а*, следует, что последовательность значений функции *f(х1), f(х2),…, f(хn)…*  сходится к числу А.

Предел функции в точке *а* обозначается

*.*

**Основные теоремы о пределах**

**1. **

**2. **

**3. **

**4. **

**5. **

**6. **

! **Все правила имеют смысл, если пределы функций  и  существуют.**

Используются также следующие пределы:



(первый замечательный предел);

(второй замечательный предел).

**Техника вычисления пределов**

При вычислении предела элементарной функции *f(x)* приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

* Функция *f(x)* определена в предельной точке *x = a.* Тогда

.

* Функция *f(x)* в предельной точке *x = a* не определена или же вычисляется предел функции при *x→∞.* Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода.

Необходимо помнить, что

**, , , , , .**

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция *f(x)* в точке *x = a* или при *x→∞* представляет собой неопределенность (типа *, , , , ,,*).

При вычислении пределов при основные теоремы о пределах сохраняют силу и, кроме того, используются правила:

а) чтобы раскрыть неопределенность типа , необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной;

б) чтобы раскрыть неопределенность типа , необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наименьшую степень переменной ;

в) чтобы раскрыть неопределенность типа , иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

г) чтобы раскрыть неопределенность типа , зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

д) чтобы раскрыть неопределенность типа , необходимо числитель и знаменатель дроби одновременно умножить на сопряженное выражение и тем самым свести к неопределенности вида  или .

**Вычислить пределы функций:**

**Пример 1: **

**Пример 2: **

**Пример 3: **

**= **

Пример 4: 



Пример5: 



**Пример 6:**



**Пример 7:**

. Теорему о пределе частного здесь применить нельзя, так как числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. В данном случае имеем неопределённость вида . Разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень х (в данном случае на х2 ), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций:

.

Здесь мы воспользовались следующим равенством:  (а – любое число).

**Пример 8:**



**Пример 9:**



Пример 10:



Вопросы для самопроверки по теме 1 Теория пределов:

* + - 1. Что называется функцией?
      2. Что такое область определения и область значений функции
      3. Перечислите способы задания функций, их достоинства.
      4. Перечислите основные свойства функций.
      5. Дайте определение предела функции в точке.
      6. Какая функция называется непрерывной в точке?
      7. Сформулируйте основные свойства пределов.
      8. Как раскрывается неопределенность вида , ?

**Тема 2. Дифференциальное исчисление**

**Определение производной**

*Определение* *2.1:* **Производной функции ** по аргументу *x* называется предел отношения ее приращения к приращению  аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю:

*** .***

Если этот предел конечный, то функция *y=f(x)* называется **дифференцируемой** в точке *x*. Если же этот предел есть ∞, то говорят, что функция *y=f(x)* имеет в точке *x* бесконечную производную.

**Механический смысл производной:** скорость есть первая производная пути по времени, т.е. .

**Геометрический смысл производной:** тангенс угла наклона касательной к графику функции  равен первой производной этой функции , вычисленной в точке касания, т.е. 

**Уравнение касательной** к графику функции в точке :



**Уравнение нормали** к графику функциив точке :



**Таблица производных**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Найти производные функций:

**Пример 1**: 



+



**Пример2**: 



**Пример 3**: 





**Дифференцирование сложной функции**

Пусть *y= y(u) ,* где *u= u(x)* – дифференцируемые функции. Тогда сложная функция *y=y[u(x)]* есть также дифференцируемая функция.

Производные сложных функций находятся при помощи таблицы:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рассмотрим примеры.

**Пример 1**: Найти производную функции 

Решение:  =

**Пример 2**: Найти производную функции 

Решение: 



=

+



Рассмотрим примеры.

**Пример 1**: Найти производную второго порядка .

Решение: 







**Исследование функции с помощью производной**

*Определение 2.5:*Точка *х0* называется **точкой локального максимума**, если для любого *х* из окрестности точки *х0* выполняется неравенство:

.

*Определение 2.6:*Точка *х0* называется точкой **локального минимума,** если для любого *х* из окрестности точки *х0* выполняется неравенство:

.

Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума** данной функции, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Точками экстремума могут служить только критические точки I рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная  обращается в нуль или терпит разрыв.

**Правило нахождения экстремумов функции **

**с помощью первой производной**

1. Найти производную функции .
2. Найти критические точки по первой производной, т.е. точки, в которых производная обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак первой производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции . Если на промежутке , то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке , то на этом промежутке функция возрастает.
4. Если в окрестности критической точки  меняет знак

с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.

1. Вычислить значения функции в точках минимума и максимума.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

**Пример 1**: Найти промежутки монотонности и экстремумы функции:  .

Решение: Найдем первую производную функции .

Найдем критические точки по первой производной, решив уравнение 





Исследуем поведение первой производной в критических точках и на промежутках между ними.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *0* |  | *2* |  |
|  | **+** | *0* | **-** | *0* | **+** |
|  |  | т. max  0 |  | т. min  -4 |  |

****

Ответ: Функция возрастает при ;

функция убывает при ;

точка минимума функции ;

точка максимума функции .

**Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба**

*Определение 2.7:* Кривая  называется выпуклой вниз в промежутке , если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка.

*Определение 2.8 :* Кривая  называется выпуклой вверх в промежутке , если она лежит ниже касательной в любой точке этого промежутка.

y y

x x

*Определение 2.9:* Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называются промежутками выпуклости графика функции.

Выпуклость вниз или вверх кривой, являющейся графиком функции , характеризуется знаком ее второй производной: если в некотором промежутке , то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же  , то кривая выпукла вверх на этом промежутке**.**

*Определение 2.10:* Точка графика функции , разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется **точкой перегиба**.

y

x

Точками перегиба могут служить только критические точки II рода, т.е. точки, принадлежащие области определения функции , в которых вторая производная обращается в нуль или терпит разрыв.

**Правило нахождения точек перегиба графика функции **

1. Найти вторую производную .

2. Найти критические точки II рода функции , т.е. точки, в которой обращается в нуль или терпит разрыв.

3. Исследовать знак второй производной в промежутка, на которые найденные критические точки делят область определения функции. Если при этом критическая точка  разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то  является абсциссой точки перегиба графика функции.

4. Вычислить значения функции в точках перегиба.

**Пример 1**: Найти промежутки выпуклости и точки перегиба следующей кривой: .

Решение: Находим , .

Найдем критические точки по второй производной, решив уравнение

.

.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 |  |
|  | + | 0 | - |
|  |  | точка  перегиба  16 |  |



Ответ: Функция выпукла вверх при ;

функция выпукла вниз при ;

точка перегиба .

**Общая схема для построения графиков функций**

1. Найти область определения функции .
2. Найти точки пересечения графика функций с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.
7. Найти асимптоты функции.
8. По результатам исследования построить график .

**Пример:** Исследовать функцию и построить ее график:

.

Решение:

1. Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения .
2. Найдем точки пересечения с осями координат:

с осью ОХ : решим уравнение ****

.

с осью ОY: ****

1. Выясним, не является ли функция четной или нечет

ной:

.

Отсюда следует, что функция является нечетной.

1. Функция непериодична.
2. Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции: .

Критические точки: .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | *-1* |  | *1* |  |
|  | **+** | *0* | **-** | *0* | **+** |
|  |  | т. max  2 |  | т. min  -2 |  |

****

1. Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции: 

Критические точки: .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *0* |  |
|  | **-** | *0* | **+** |
|  |  | точка  перегиба  0 |  |

****

1. Функция непрерывна, асимптот у нее нет.
2. По результатам исследования построим график функции:

y

2

1. x

-2

Вопросы для самопроверки теме 2 Дифференциальное исчисление:

1. Дать определение производной функции.
2. Что называется приращением аргумента, приращением функции?
3. Какой механический смысл имеет производная?
4. Сформулировать геометрический смысл производной.
5. Как найти производную суммы или разности?
6. Как найти производную произведения?
7. Как найти производную частного двух функций?
8. Сформулируйте правила нахождения производной сложной функции?
9. Как найти производную второго порядка? производную четвертого порядка.
10. Что такое критические точки функции?
11. Сформулировать достаточные условия возрастания и убывания функции.
12. Какими точками отделяются промежутки возрастания от промежутков убывания функции?
13. Сформулируйте правила нахождения точек экстремума функции.
14. Сформулировать достаточное условие выпуклости функции. Приведите алгоритм нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба.

**Тема 3. Интегральное исчисление**

**Неопределенный интеграл. Методы вычисления**

*Определение 3.1:* Функция *F(x)* называется **первообразнойдля функции *f(x)*,** если  или .

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

*Определение 3.2* **:** Совокупность *F(x)+С* всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** от этой функции и обозначается:

*.*

**Основные свойства неопределенного интеграла:**

1.  2. ;

3.  4. ;

5. ; 6. .

**Непосредственное интегрирование**

Непосредственное интегрирование предполагает использование при нахождении неопределенных интегралов таблицы интегралов

**Таблица интегралов**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |





Рассмотрим нахождение интегралов непосредственным методом.

**Пример 1**: Найти неопределенный интеграл:

.

Решение: =

=





.

**Пример 2**: Найти неопределенный интеграл: .

Решение: =

.

**Пример 3**: Найти неопределенный интеграл 

Решение: =



### Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция определена на отрезке . Разобьем отрезок на *n* частей точками , выберем на каждом элементарном отрезке  произвольную точку ξk  и обозначим через  длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции на отрезке  называется сумма вида



*Определение 3.3* **:** **Определенным интегралом** от функции на отрезке называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:



Для любой функции , непрерывной на отрезке , всегда существует определенный интеграл 

#### Простейшие свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:



2) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла

**

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

**

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: ******
2. Отрезок интегрирования можно разделить на части*:*

**

*с*-точка, лежащая между *а* и *b.*

6) Если  на отрезке , то .

Для вычисления определенного интеграла от функции , в том случае , когда можно найти соответствующую первообразную , служит формула Ньютона-Лейбница:

 =*F(b)-F(a)*

Рассмотрим нахождение простейших определенных интегралов.

**Пример 1**: Вычислить определенный интеграл .

Решение: =

**Пример 2:** Вычислить определенный интеграл: .

Решение: 



.

Вопросы для самопроверки по теме 3 Интегральное исчисление:

1. В чем заключается смысл действия, обратного дифференцированию?
2. Дать определение первообразной функции
3. Чем отличаются друг от друга любые две первообразные данной функции?
4. Как проверить, правильно ли найдена первообразная данной функции ?
5. Дать определение неопределенного интеграла.
6. Перечислить свойства неопределенного интеграла
7. Дать определение определенного интеграла.
8. Перечислить свойства определенного интеграла.
9. Запишите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
10. В чем отличия методов замены переменной в определенном и неопределенном интегралах?

**Учебно – методическое обеспечение дисциплины**

Перечень рекомендуемые учебных изданий, интернет – ресурсов, дополнительной литературы:

Основные источники:

Учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования «Математика» И.Д.Пехлецкий., Москва: Асаdemia, 2002

* + - 1. Письменный Д.В Конспект лекций по высшей математике (I часть)М.Рольф.2002
      2. Письменный Д.В Конспект лекций по высшей математике (II часть)М.Рольф.2002

Дополнительные источники:

1. Алексеев А.С., Белоновская Л.Н. и др. Дидактические материалы (для 10 классов вечерней общеобразовательной школы) М.Просвещение. 1988

2. Брадис В.М.4-х значные математические таблицы.М.Просвещение .1974

3. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г.Производная и интеграл. М. Просвещение.1993

4. Выгодский М.Я.Справочник по высшей математике .М. Джангар.2001

5. Ганеев Х.Ж.Учителю математики об элементах краеведения. Екатеринбург.1996

6. Гольдич В.А.Алгебра: решение уравнений и неравенств. Санкт-Петербург. Литера.2005

7. Денищева Л.О., Корешкова Т.А. Тематические тесты и зачёты. Алгебра и начала анализа.М. Мнемозина. 2007

8. Денищева Л.О., Кузнецова Л.В. и др. Зачёты в системе дифференцированного обучения.М. Просвещение. 1993 Вариант IМ. Интеллект-центр.2001

1. Звавич Л.И., Поташник А.М. и др.Сборник задач по алгебре и математическому анализу (для 10-11 кл)М.Новая школа.1996
2. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2005.
3. Клеймёнов А.Ф, Шнейдер А.Е. Задачи письменного экзамена по математике за курс старшей и основной школы. ИРРО.1999
4. Колмогорова А.Н. Учебное пособие: Алгебра и начала анализа. М. Просвещение .1982
5. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Часть I М.Просвещение. 1971
6. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Часть II М.Просвещение. 1971
7. Мордкович А.Г., Сухорский А.М.Справочник школьника по математике.10 –11 класс.М.Аквариум. 1989
8. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2006.
9. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2006.
10. Саакян С.М., Гольдман А.М. и др.Задачи по алгебре и началам анализа ,10- 11 класс.М.Просвещение. 1992
11. Черкасов Р.С., Столяр А.А.Методика преподавания математики.М. Просвещение. 1985
12. Фирсов В.В.Планирование обязательных результатов обучения математике.М.Просвещение. 1989
13. Шарыгин И.Ф., голубеев В.И.Факультативный курс по математике (решение задач).М .Просвещение.1991

Интернет-ресурсы*:*

<http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo> (Геометрический смысл производной)

<http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g>(Лекция 1. Первообразная и неопределенный интеграл)

<http://www.youtube.com/watch?v=2N-1jQ_T798&feature=channel>(Лекция 5. Интегрирование по частям)

<http://www.youtube.com/watch?v=3qGZQW36M8k&feature=channel> (Лекция 4. Таблица основных интегралов)

<http://www.youtube.com/watch?v=7lezxG4ATcA&feature=channel> (Лекция 3. Непосредственное интегрирование)

<http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3K1KHU&feature=channel> (Лекция 4. Метод подстановки)

<http://www.youtube.com/watch?v=dU_FMq_lss0&feature=channel> (Лекция 12.Понятие определенного интеграла)

<http://www.youtube.com/watch?v=wg_AIYBB0dg&feature=related> (Гиперметод умножения)

<http://www.youtube.com/watch?v=C_7clQcJP-c> (Теория вероятности)

<http://www.youtube.com/watch?v=dZPRzB1Nj08> (Лекция 6. Комплексные числа (часть 1))

<http://www.youtube.com/watch?v=Cfy0CXpR9Lo> (Комплексные числа и фракталы. Часть 1)

<http://www.youtube.com/watch?v=uis7Hg2gSNo&feature=related> (Теория фракталов)

Задание 1 (№1-15)

а) вычислить предел;

б) найти значение производной;

в) найти значение второй производной.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| а); | б) *f(х)=* | в) y = 5x3 + 8x2 – 4x + 7. |
| a); | б) *f(х)=* | в) y = 7cos x + 9x6. |
| а) | б) *f(х)=* | в) y = 5 +6tg x. |
| а); | б) *f(х)=* | в) y = 7x8 + 9 x9 + 4. |
| а) | б) *f(х)=* | в) y = 4x7 + . |
| Вычислить площадь фигуры ограниченной указанными линиями  y2 = и у = 2 – х2; | | | |
| х2 = 3у и у = х; | | | |
| у = х2 – 6х + 9 и 3х – у – 9 = 0; | | | |
| у2 4х, х = 1 и х = 9; | | | |
| у2 = 9х и х = 4; | | | |

Исследовать функцию и построить график.

|  |  |
| --- | --- |
| а) у = 5x3 – 30x2; | б) |
| a) у = -x3 + 3x2 + 1; | б) |
| а) у = 2x3 – 6x2 – 3; | б) |
| а)у = 45x + 3x2 – x3 + 2; | б) |
| а)у = x3 – 6x2 + 5; | б) |

Вычислить интеграл:

а) непосредственное интегрирование;

б) замена.

|  |  |
| --- | --- |
| а); | б); |
| a); | б); |
| а); | б); |
| а); | б); |
| а); |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |